Newton Metodu

Nümerik Kök Bulma

Mahmut KOÇAK

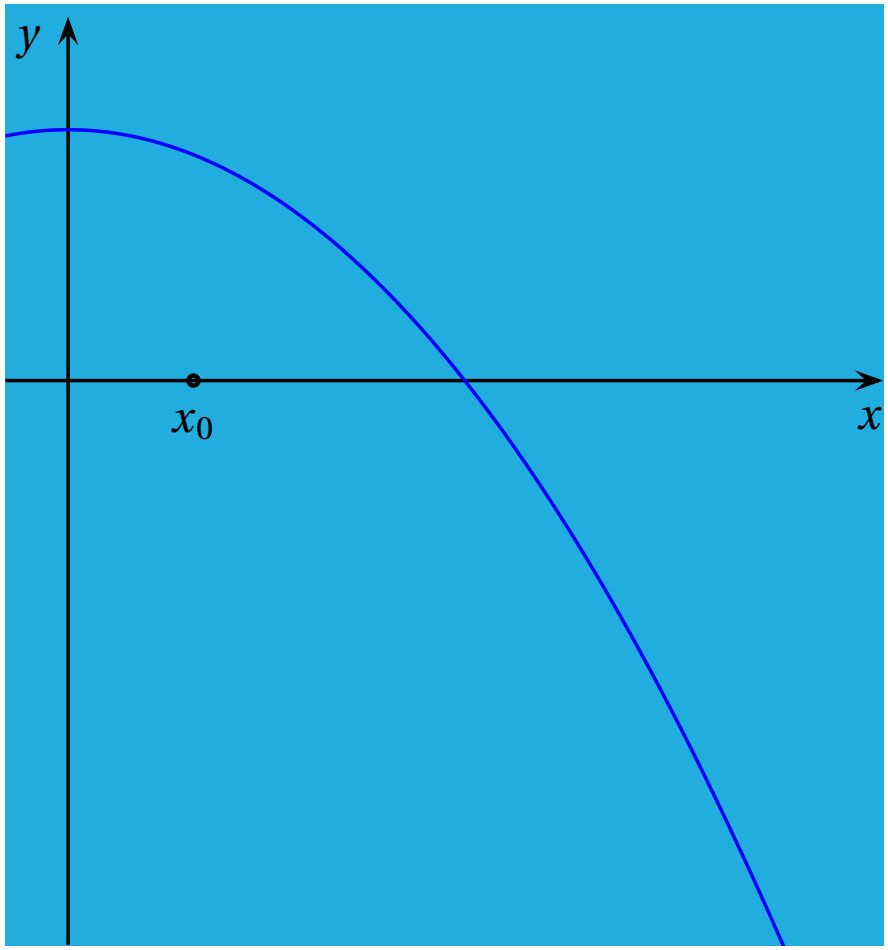
ESOGU FEN-ED.FAK. MATEMATİK BÖLÜMÜ

http://www2.ogu.edu.tr/ mkocak

Newton Metodu

$f(x_0) = 0$ denklemini nümerik olarak çözelim.

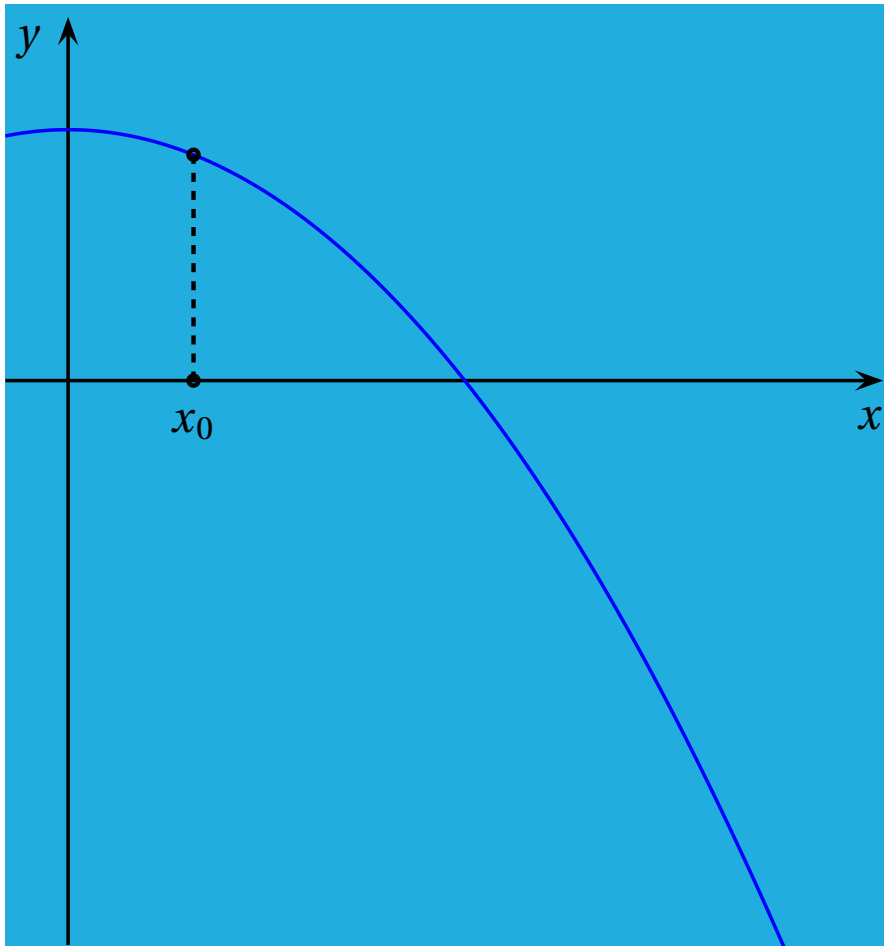
- Tahmini bir x_0 çözümü seçelim.



Newton Metodu

$f(x_0) = 0$ denklemini nümerik olarak çözelim.

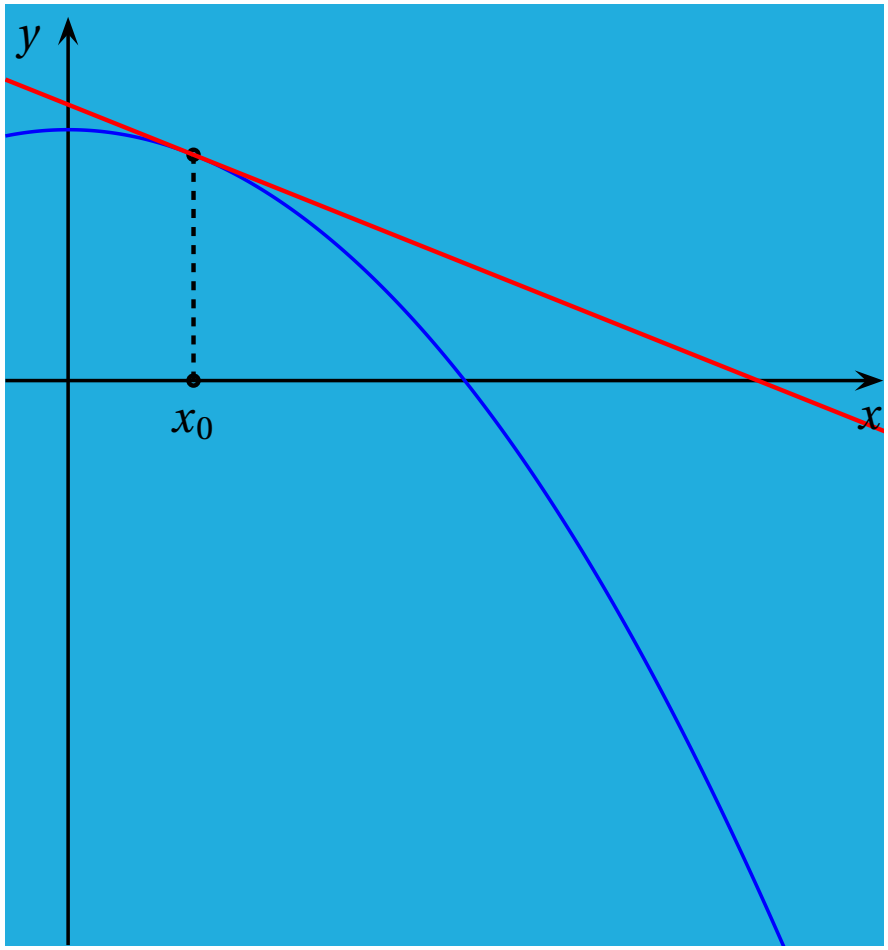
- Tahmini bir x_0 çözümü seçelim.
- x_0 dan geçen y-eksenine parelel doğrunun eğriyi kestiği noktayı işaretleyelim.



Newton Metodu

$f(x_0) = 0$ denklemini nümerik olarak çözelim.

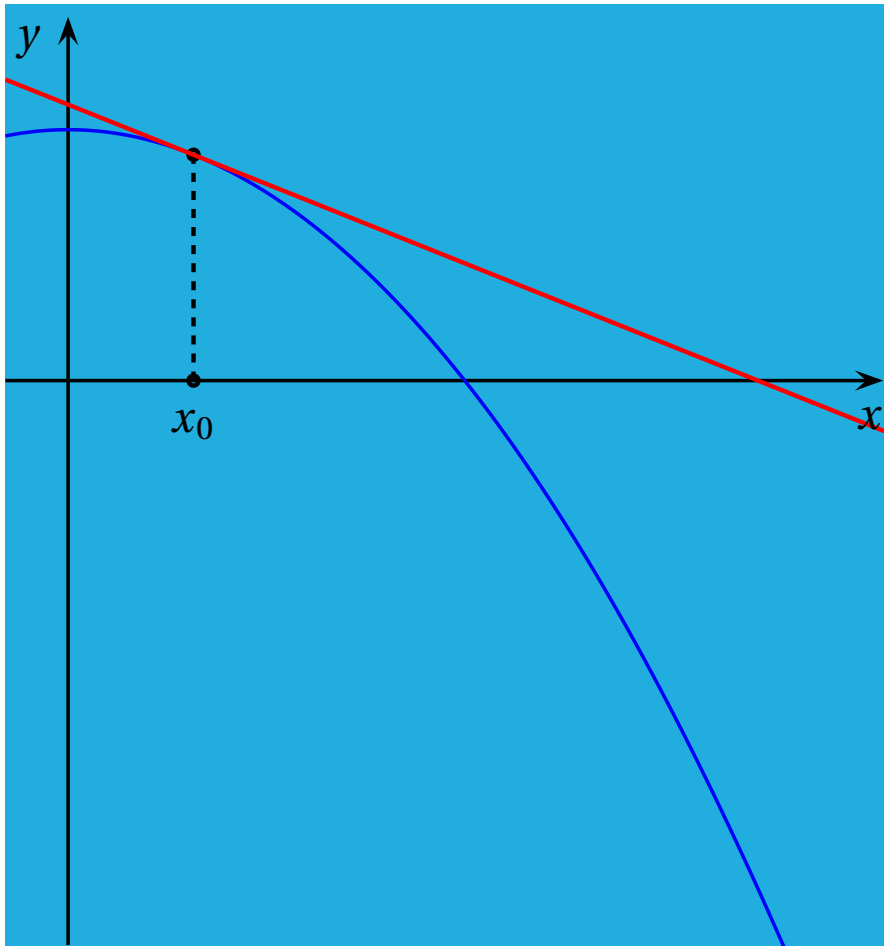
- Tahmini bir x_0 çözümü seçelim.
- x_0 dan geçen y-eksenine parelel doğrunun eğriyi kestiği noktayı işaretleyelim.
- Bu noktadan geçen teğeti çizelim. Teğetin denklemi $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dır.



Newton Metodu

$f(x_0) = 0$ denklemini nümerik olarak çözelim.

- Tahmini bir x_0 çözümü seçelim.
- x_0 dan geçen y-eksenine parelel doğrunun eğriyi kestiği noktayı işaretleyelim.
- Bu noktadan geçen teğeti çizelim. Teğetin denklemi $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dır.
- Teğetin x-eksenini kestiği nokta x_1 olsun.



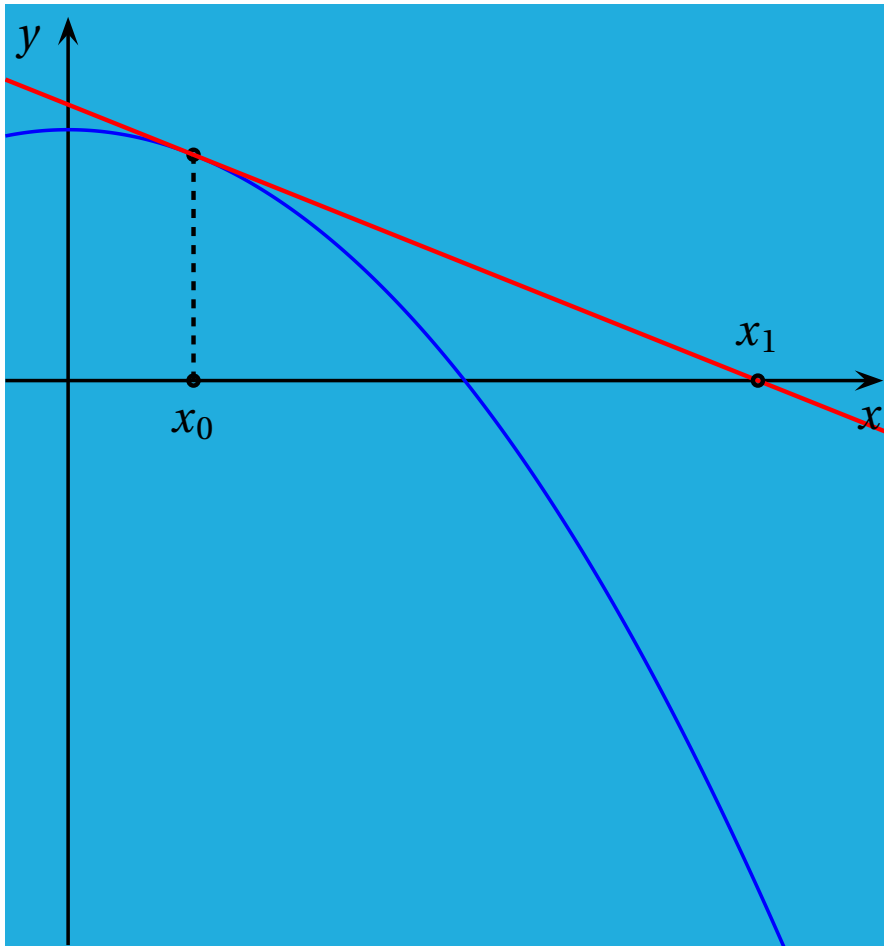
Newton Metodu

$f(x_0) = 0$ denklemini nümerik olarak çözelim.

- Tahmini bir x_0 çözümü seçelim.
- x_0 dan geçen y-eksenine parelel doğrunun eğriyi kestiği noktayı işaretleyelim.
- Bu noktadan geçen teğeti çizelim. Teğetin denklemi $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dır.
- Teğetin x-eksenini kestiği nokta x_1 olsun.
- Kesim noktası

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

formülü ile bulunur.



Newton Metodu

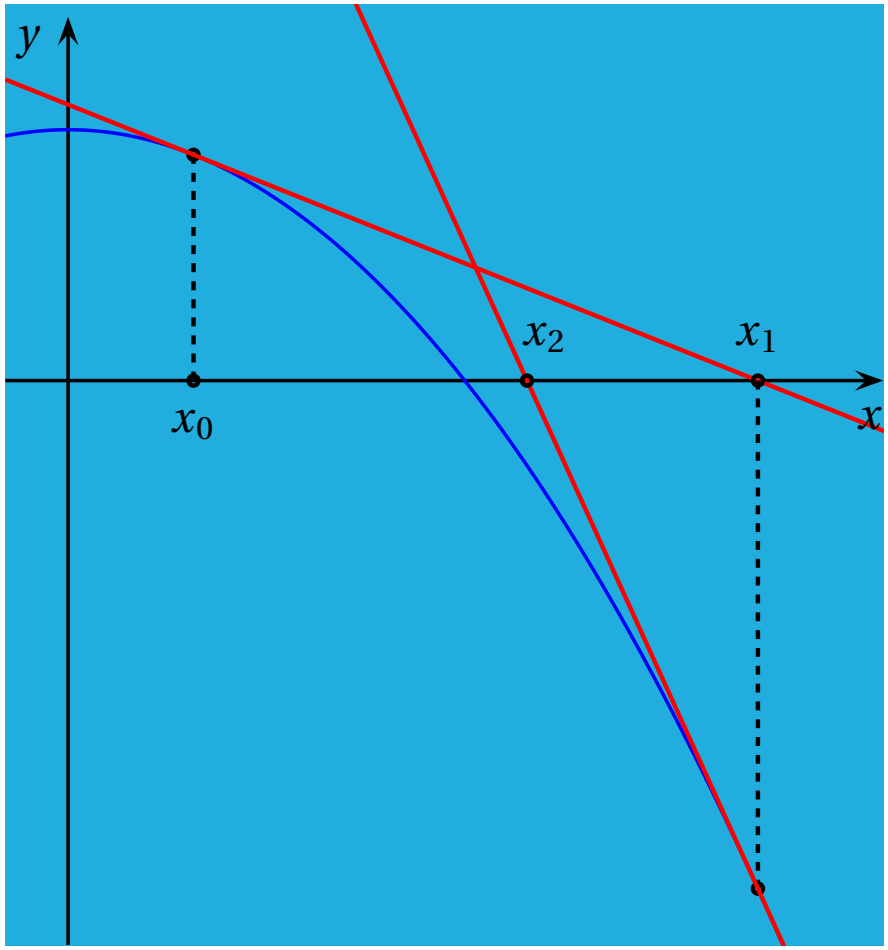
$f(x_0) = 0$ denklemini nümerik olarak çözelim.

- Tahmini bir x_0 çözümü seçelim.
- x_0 dan geçen y-eksenine parelel doğrunun eğriyi kestiği noktayı işaretleyelim.
- Bu noktadan geçen teğeti çizelim. Teğetin denklemi $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dır.
- Teğetin x-eksenini kestiği nokta x_1 olsun.
- Kesim noktası

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

formülü ile bulunur.

- x_1 i tahmini kök olarak alıp yöntemi tekrar edelim.



Newton Metodu

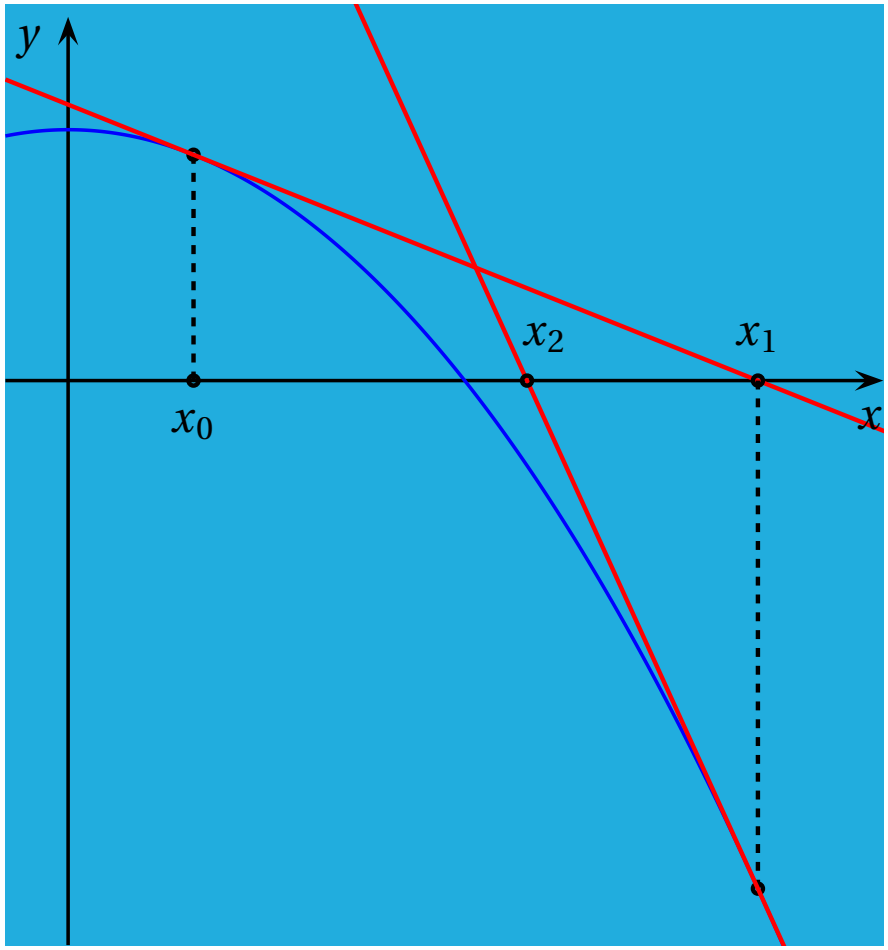
$f(x_0) = 0$ denklemini nümerik olarak çözelim.

- Tahmini bir x_0 çözümü seçelim.
- x_0 dan geçen y-eksenine parelel doğrunun eğriyi kestiği noktayı işaretleyelim.
- Bu noktadan geçen teğeti çizelim. Teğetin denklemi $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dır.
- Teğetin x-eksenini kestiği nokta x_1 olsun.
- Kesim noktası

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

formülü ile bulunur.

- x_1 i tahmini kök olarak alıp yöntemi tekrar edelim.
- x_2 kesim noktası $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ formülü ile bulunur.



Sonuç

Başlangıçda seçilen x_0 tahmini kökü gerçek köke yeterince yakındı. Şekil 5 de görüldüğü gibi ikinci tahmini kök

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

gerçek köke x_0 dan biraz daha yakındır. Şekil 7 de görüldüğü gibi üçüncü tahmini kök

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

gerçek köke x_1 den biraz daha yakındır.
Yönteme bu şekilde devam edilirse hesaplanmış olan x_n için tanjant doğrusu $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ olarak bulunur. Bu doğrunun x-ekseni ile arakesiti x_{n+1} ve bir sonraki tahmini kök

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

olur. Tahmini x_0 kökü ve (1) Newton İterasyon formülü $f(x) = 0$ denkleminin kökünü yaklaşık olarak bulmak için bir yöntem oluşturur.

Örnek 1

Örnek 1: $x^2 = 2$ denkleminin pozitif kökünü bulalım.
Çözüm: Fonksiyon $f(x) = x^2 - 2$ dir.
1. Adım: f nin türevi $f'(x) = 2x$ dir.
2. Adım: İtarasyon formülünü bulalım:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

Böylece bu problem için iterasyon formülü

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

dir. Bu formül ve $x_0 = 1.5$ tahmini kökü ile aşağıdakiler hesaplanır.

Örnek 1 e devam

3. Adım: Bulunan tahmini köklerin bir tablosunu oluşturalım. Tahmini başlangıç kökü $x_0 = 1.5$ ve iterasyon formülü $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n}$ dir.

Newton Metodu		
	$x_0 = 1.5$	$f(x) = x^2 - 2$
n	x_n	$f(x_n)$
0	1.50000000	0.15000000
1	1.41666667	0.00694445
2	1.41421568	0.00000600
3	1.41421356	0.00000000
4	1.41421356	0.00000000

Bu durumda $x^2 - 2 = 0$ denkleminin pozitif kökü x yaklaşık olarak $x \approx 1.41421356$ dir. Diğer bir deyişle $\sqrt{2} = \approx 1.41421356$ olur.

Örnek 2

Örnek 2: $x^3 = x + 1$ denkleminin pozitif kökünü bulalım.
Çözüm: Fonksiyon $f(x) = x^3 - x - 1$ dir.
1. Adım: f nin türevi $f'(x) = 3x^2 - 1$ dir.
2. Adım: İtarasyon formülünü bulalım:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$$

Böylece bu problem için iterasyon formülü

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$$

dir. Bu formül ve $x_0 = 1.5$ tahmini kökü ile aşağıdakiler hesaplanır.

Ornek 2 ye devam

3. Adım: Bulunan tahmini köklerin bir tablosunu oluşturalım. Tahmini başlangıç kökü $x_0 = 1.5$ ve iterasyon formülü $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$ dir.

Newton Metodu		
	$x_0 = 1.5$	$f(x) = x^3 - x - 1$
n	x_n	$f(x_n)$
0	1.50000000	0.87500000
1	1.34782608	0.10058217
2	1.32520039	0.00205836
3	1.32471817	0.00000092
4	1.32471795	0.00000000
5	1.32471795	0.00000000

Bu durumda $x^3 = x + 1$ denkleminin kökü x yaklaşık olarak $x \approx 1.32471795$ dir.