SÜREKLİLİK KAVRAMİ

 mkocak@ogu.edu.tr
Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

http://www2.ogu.edu.tr/~mkocak/
Sunum Tarihi: Nisan 17, 2008

Süreklilik Kavramı

Süreklilik kavramı bir fonksiyonun tanım kümesine ait bir x_0 noktası için $f(x_0)$ noktası ve x_0 ın civarındaki davranışı hakkında bilgi verir. Süreklilik matematik ve bir çok bilim dalında uygulamaları olan önemli bir kavramdır.

$x_0 \in \mathbb{R}$ ve A kümesi $\mathbb{R}$ nin bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$ özelliğine sahip bir alt kümesi olmak üzere bazı $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için x bağımsız değişkeni x_0 reel sayısına yeterince yakın tutularak $f(x)$ değerleri $f(x_0)$ değerine istenildiği kadar yakın tutulabilir. Bazı $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için x bağımsız değişkeni x_0 reel sayısına yeterince yakın tutularak $f(x)$ değerleri $f(x_0)$ değerine istenildiği kadar yakın tutulamaz. Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $x_0 = 1$ için x değerleri x_0 ya ne kadar yakın seçilirse seçilsin $f(x)$ değerlerini $f(x_0) = f(1) = 1$ sayısına istediğimiz kadar yakın tutamayız. Şekil ? ye bakınız. Bu f fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasında limitinin olmadığına dikkat ediniz.

Şimdi $f(x) = x + 1$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $x_0 = 1$ için x değerleri x_0 ya yeterince yakın tutularak $f(x)$ değerleri $f(x_0) = f(1) = 2$ sayısına istenildiği kadar yakın tutulabilir. Bu durumda f ye x_0 noktasında süreklidir denir. Bu f fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasındaki limitinin $f(x_0) = f(1) = 2$ ye eşit olduğuna dikkat ediniz. Şekil ? ye bakınız.

Daha genel olarak $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olmak üzere $x \in A$ değerlerini x_0 a yeterince yakın tutarak $f(x)$ değerlerini $f(x_0)$ sayısına istediğimiz kadar yakın tutabiliyorsak f ye x_0 noktasında süreklidir denir.

Bir Fonksiyonun Sürekliliği

Tanım 1 *$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ sayısı $|x - x_0| < \delta$ özelliğindeki her $x \in A$ için*

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

*olacak şekilde varsa f fonksiyonuna x_0 **noktasında süreklidir** denir. f fonksiyonu her $x \in A$ noktasında sürekli ise f ye (A üzerinde) **sürekli fonksiyon** denir.* ☜

Örnek 1 *$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = a$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.*

Çözüm. $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta > 0$ herhangi bir reel sayı olsun. Bu durumda $|x - x_0| < \delta$ özelliğindeki her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| = |a - a| < \varepsilon$$

olur. O halde f, x_0 noktasında süreklidir. x_0 keyfi olduğundan f fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir. Şekil ? ye bakınız.✍

Örnek 2 *$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ şeklinde tanımlı $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.*

Çözüm. Keyfi bir x_0 noktası seçelim. Her $\varepsilon>0$ sayısı için bir $\delta>0$ sayısının $|x-x_0|<\delta$ özelliğini sağlayan her $x\in\mathbb{R}$ için $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$ olacak şekilde bulunabileceğini göstermeliyiz. $\varepsilon>0$ sayısı verilsin ve $\delta>0$ olsun. Bu durumda $|x-x_0|<\delta$ ise

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=|(ax+b)-(ax_0+b)|=|ax+b-ax_0-b|=|a(x-x_0)|=|a|\,|x-x_0|<|a|\,\delta$$

olur. Böylece $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}$ seçersek $|x-x_0|<\delta$ ise

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=|a|\,|x-x_0|<|a|\,\delta=|a|\,\frac{\varepsilon}{|a|}=\varepsilon$$

olur. Böylece, f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. x_0 keyfi olduğundan her $x\in\mathbb{R}$ noktasında f fonksiyonu süreklidir. Şekil ? e bakınız.✍

Örnek 3 *$f(x)=[\![x]\!]$ şeklinde tanımlı $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tam değer fonksiyonunun*

(a). $x_0\in\mathbb{Z}$ noktasında sürekli olmadığını gösterelim.

(b). $x_0\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim.

Çözüm.

(a). $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ verilsin. $1>\delta>0$ olsun. $x=x_0-\dfrac{\delta}{2}$ için $|x-x_0|<\delta$ olur. Diğer yandan $x_0-1\leq x<x_0$ olduğu da göz önüne alınırsa

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=|[\![x]\!]-[\![x_0]\!]|=|x_0-1-x_0|=1>\varepsilon$$

olur. Ohalde f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli değildir. Şekil ? ya bakınız.

(b). $x_0\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ olduğundan $n-1\leq x_0<n$ olacak şekilde bir $n\in\mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda $[\![x_0]\!]=n-1$ dir. $\varepsilon>0$ verilsin. $\delta=\dfrac{1}{2}\min\{|x_0-n|,|x_0-(n-1)|\}$ diyelim. Bu durumda $|x-x_0|<\delta$ özelliğindeki her x için $[\![x]\!]=[\![x_0]\!]=n-1$ (Şekil ? ye bakınız) olduğu da göz önüne alınırsa

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=|[\![x]\!]-[\![x_0]\!]|=|(n-1)-(n-1)|=0<\varepsilon$$

olur. O halde f, x_0 noktasında süreklidir. Şekil ? ye bakınız.✍

Teorem 1 *$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x_0 \in A$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A$ olmak üzere $x_n \to x_0$ özelliğine sahip her (x_n) dizisi için $f(x_n) \to f(x_0)$ olmasıdır.*

Sonuç 1 *$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası A kümesinin bir limit noktası ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin x_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ olmasıdır.*

Tek Taraflı Süreklilik

Tanım 2 (Sağdan ve Soldan Süreklilik)

(a). *$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ noktası bazı $b \in \mathbb{R}$ için $A \cap (x_0, b)$ kümesinin bir limit noktası ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ise f ye x_0 noktasında* ***sağdan sürekli*** *dir denir. Yani verilen her $\varepsilon > 0$ için*

$$|x - x_0| < \delta \text{ ve } x_0 \le x$$

özelliğindeki her $x \in A$ için

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f ye x_0 noktasında ***sağdan sürekli*** *dir denir.*

(b). *$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ noktası bazı $a \in \mathbb{R}$ için $A \cap (a, x_0)$ kümesinin bir limit noktası ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ise f ye x_0 noktasında* ***soldan sürekli*** *dir denir. Yani verilen her $\varepsilon > 0$ için*

$$|x-x_0|<\delta \text{ ve } x_0 \geq x$$

özelliğindeki her $x \in A$ için

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa f ye x_0 noktasında **soldan sürekli** dir denir.

Sonuç 2 *$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası A kümesinin bir limit noktası ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin x_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin x_0 da sağdan ve soldan sürekli olmasıdır.*

Örnek 4 *$f(x)=[\![x]\!]$ şeklinde tanımlı tam değer fonksiyonunun $n \in \mathbb{N}$ noktasında sürekli olmadığını Sonuç 2 yı kullanarak gösterelim.*

Çözüm. $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=n=f(n)$ olduğundan f fonksiyonu n noktasında sağdan sürekli ve $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)=n-1\neq f(n)$ olduğundan f, n noktasında soldan sürekli değildir. $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to n^+} f(x)$ olduğundan f, n noktasında sürekli değildir.

Örnek 5 *$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

$$f(x)=\begin{cases} -x+1, & x<0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonunun 0 noktasında sürekli olmadığını gösterelim.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x+1) = 1$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ dır. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ olduğundan f, 0 noktasında sürekli değildir.✍

Örnek 6

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

Çözüm. Fonksiyonun $x\neq 0$ için sürekli olduğu açıktır. $x=0$ noktasında

$$f(0)=0 \text{ ve } \lim_{x\to 0^-} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

dir. (Şekil ? ya bakınız.) Böylece, fonksiyon $x=0$ noktasında da süreklidir. O halde f fonksiyonu her $x\in\mathbb{R}$ noktasında süreklidir.✍

Sonuç 3 *$g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $h:[b,c]\to\mathbb{R}$ fonksiyonları b noktasında sırasıyla soldan ve sağdan sürekli olsunlar. Bu durumda $g(b)=h(b)$ ise*

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\in[a,b] \\ h(x), & x\in[b,c] \end{cases}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu b noktasında süreklidir.

Örnek 7

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{3}{2}, & x\geq 0 \\ \frac{3}{2}, & x\leq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

Çözüm. $g(x)=x+\frac{3}{2}$ fonksiyonu her $x\in[0,\infty)$ için ve $h(x)=\frac{3}{2}$ fonksiyonu her $x\in(-\infty,0]$ için sürekli olduklarından bu fonksiyonlar $x=0$ noktasında sırasıyla sağdan ve soldan süreklidirler. Diğer taraftan $g(0)=h(0)=\frac{3}{2}$ olduğundan $x=0$ noktasında f fonksiyonu süreklidir. f, $x\neq 0$ noktalarında sürekli olduğundan f, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olur. Şekil ? ye bakınız.✍

Sürekli Fonksiyonlar Üzerinde Aritmetik İşlemler

Teorem 2 *$f,\ g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $x_0 \in A$ noktasında sürekli olsunlar. Bu durumda*

(i). Toplam Kuralı: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,

(ii). Çarpım Kuralı: $(fg)(x) = f(x)g(x)$,

(iii). Skalerle Çarpım Kuralı : $(cf)(x) = cf(x) \quad (c \in \mathbb{R})$,

(iv). Bölüm Kuralı: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad (\text{her } x \in A \text{ için } g(x) \neq 0)$

fonksiyonları da x_0 noktasında süreklidir.

Örnek 8

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x \leq 0 \\ (x-2)^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

Çözüm. $g_1(x) = x+2$ şeklinde tanımlı $g_1 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan Teorem 2 gereğince $g(x) = (x+2)^2$ şeklinde tanımlı $g : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Benzer şekilde $h_1(x) = x-2$ şeklinde tanımlı $h_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan Teorem 2 gereğince $h(x) = (x-2)^2$ şeklinde tanımlı $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Diğer taraftan $g(0) = h(0) = 4$ olduğundan $x = 0$ noktasında f fonksiyonu süreklidir. Şekil ? a bakınız.✍

Örnek 9 $C = \left\{ \dfrac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ *olsun.* $f(x) = \tan x$ *şeklinde tanımlı* $f : \mathbb{R} \setminus C \to \mathbb{R}$ *ve* $g(x) = \sec x$ *şeklinde tanımlı* $g : \mathbb{R} \setminus C \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarının sürekli olduklarını gösterelim.*

Çözüm. $x \in \mathbb{R} \setminus C$ için $\cos x \neq 0$ ve $\mathbb{R} \setminus C$ üzerinde $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonları sürekli olduklarından bölüm kuralı gereğince f, $\mathbb{R} \setminus C$ üzerinde süreklidir.

$g(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ şeklinde tanımlı $g : \mathbb{R} \setminus C \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in \mathbb{R} \setminus C$ için $\cos x \neq 0$ ve $\mathbb{R} \setminus C$ üzerinde $\cos x$ fonksiyonu sürekli olduğundan bölüm kuralı gereğince g, $\mathbb{R} \setminus C$ üzerinde süreklidir. ✍

Örnek 10 $S=\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ *olsun.* $x\in\mathbb{R}\backslash S$ *için* $f(x)=\cot x$ *şeklinde tanımlı* $f:\mathbb{R}\backslash S\to\mathbb{R}$ *ve* $g(x)=\csc x$ *şeklinde tanımlı* $g:\mathbb{R}\backslash S\to\mathbb{R}$ *fonksiyonlarının sürekli olduklarını gösterelim.*

Çözüm. $x\in\mathbb{R}\backslash S$ için $\sin x\neq 0$ ve $\mathbb{R}\backslash S$ üzereinde $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonları sürekli olduklarından bölüm kuralı gereğince f, $\mathbb{R}\backslash S$ üzerinde süreklidir.

$g(x)=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ şeklinde tanımlı $g:\mathbb{R}\backslash S\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $x\in\mathbb{R}\backslash S$ için $\sin x\neq 0$ ve $\mathbb{R}\backslash S$ üzerinde $\sin x$ fonksiyonu sürekli olduğundan g fonksiyonu da bölüm kuralı gereğince $\mathbb{R}\backslash S$ üzerinde süreklidir.✍

Sonuç 4 $f_1,f_2,\cdots,f_n:A\to\mathbb{R}$ *fonksiyonları sürekli olsunlar. Bu durumda*

(a). $c_1,c_2,\cdots,c_n\in\mathbb{R}$ *olmak üzere* $c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n:A\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu süreklidir.*

(b). $f_1f_2\cdots f_n:A\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu süreklidir.*

Örnek 11 $c\in\mathbb{R}$ *olmak üzere her* $n\in\mathbb{N}$ *için* $f(x)=cx^n$ *şeklinde tanımlı* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.*

Çözüm. $g(x)=x$ fonksiyonu sürekli olduğundan çarpım kuralı gereğince $h(x)=x^n$ fonksiyonu ve dolayısıyla $f(x)=cx^n$ fonksiyonu süreklidir.✍

Süreklilik . . .
Bir Fonksiy . . .
Tek Taraflı . . .
Sürekli . . .
Bileşke . . .
Kapalı ve . . .
Ters Fonksi- . . .
Süreksizlik . . .

Örnek 12 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ *şeklinde tanımlı* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.*

Çözüm. Örnek 11 ve toplam kuralı gereğince f fonksiyonu süreklidir.✍

Örnek 13

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0}{d_m x^m + d_{m-1}x^{m-1} + \cdots + d_1 x + d_0}$$

rasyonel fonksiyonunun $q(x) \neq 0$ *özelliğindeki her* $x \in \mathbb{R}$ *noktasında sürekli olduğunu gösterelim.*

Çözüm. Örnek 12 gereğince

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

ve

$$q(x) = d_m x^m + d_{m-1}x^{m-1} + \cdots + d_1 x + d_0$$

fonksiyonları her $x \in \mathbb{R}$ için süreklidir. Bölüm kuralı gereğince $q(x) \neq 0$ özelliğindeki her $x \in \mathbb{R}$ noktasında f fonksiyonu süreklidir. ✍

Teorem 3 (Süreklilik İçin Sandiviç Kuralı) *$x_0 \in A$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$, $h: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin ve*

(i). Her $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ için $h(x) \le f(x) \le g(x)$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı var,

(ii). $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$,

(iii). h ve g fonksiyonları x_0 noktasında sürekli

şartları sağlansın. Bu durumda f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Bileşke Fonksiyonların Sürekliliği

Teorem 4 (Bileşke Fonksiyonun Sürekliliği) *$f(A) \subseteq B$ olmak üzere $f: A \to B$ fonksiyonu x_0 da sürekli ve $g: B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $f(x_0) = y_0$ da sürekli olsun. Bu durumda $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.*

Örnek 14

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu Teorem 4 i kullanarak gösterelim.

Süreklilik . . .
Bir Fonksiy . . .
Tek Taraflı . . .
Sürekli . . .
Bileşke . . .
Kapalı ve . . .
Ters Fonksi- . . .
Süreksizlik . . .

Çözüm.

(i). Her x için $g(x)=x$ fonksiyonu sürekli ve $x\neq 0$ için $h(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu süreklidir. Böylece bileşke ve çarpım kuralı gereğince $x\neq 0$ için $f(x)=x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ fonksiyonu süreklidir. Bu durumda f fonksiyonu $x\neq 0$ noktalarında süreklidir.

(ii). $h(x)=-|x|$ ve $g(x)=|x|$ fonksiyonları $x=0$ da süreklidir. Her x için $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ olduğundan sandiviç kuralı gereğince f fonksiyonu 0 noktasında süreklidir. (Şekil ?? ya bakınız.)

(i) ve (ii) gereğince f her x noktasında süreklidir.✍

Teorem 5 *$f(A)\subseteq B$ olmak üzere $f:A\to\mathbb{R}$, $g:B\to\mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin ve x_0, A nın bir limit noktası olsun. Bu durumda*

(i). $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$,

(ii). *$\varepsilon>0$ özelliğindeki bazı ε için g fonksiyonu $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ kümesi üzerinde sürekli*

ise $\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=g(l)$ dir.

Not 1 *Teorem 5 ın koşulları altında*

$$\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=g(\lim_{x\to x_0} f(x))=\lim_{f(x)\to l} g(f(x))=g(l)$$

olur.

Örnek 15 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{7+x}-2}$ *limitini bulalım.*

Çözüm. $g(z)=\dfrac{z^3-8}{z-2}$ ve $f(x)=\sqrt[3]{7+x}$ olsun. Bu durumda

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{f(x)^3-8}{f(x)-2}=\frac{\left(\sqrt[3]{7+x}\right)^3-8}{\left(\sqrt[3]{7+x}\right)-2}=\frac{(7+x)-8}{\left(\sqrt[3]{7+x}\right)-2}=\frac{x-1}{\left(\sqrt[3]{7+x}\right)-2}$$

olur. Böylece $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{7+x}=2$ olduğundan

$$\lim_{x\to 1}(g\circ f)(x)=\lim_{f(x)\to 2} g(f(x))=\lim_{z\to 2}\frac{z^3-8}{z-2}=\lim_{z\to 2}\frac{(z-2)(z^2+2z+4)}{(z-2)}=\lim_{z\to 2}(z^2+2z+4)=12$$

elde edilir.

Kapalı ve Sınırlı [a,b] Aralığı Üzerinde Tanımlı Sürekli Fonksiyonlar

Teorem 6 *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda*

(i). *f, $[a,b]$ üzerinde sınırlıdır.*

(ii). *f fonksiyonu maksimum ve minimum değerlerini $[a,b]$ üzerinde alır.*

Teorem 7 (Aradeğer Teoremi) *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $m=\min f(x)$, $M=\max f(x)$ olsun. Bu durumda $m\le c\le M$ özelliğini sağlayan her $c\in\mathbb{R}$ için bir $x_0\in[a,b]$ noktası $f(x_0)=c$ olacak şekilde mevcuttur.*

Sonuç 5 *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(a)f(b)<0$ ise en az bir $x_0\in(a,b)$ noktası için $f(x_0)=0$ olur.*

Örnek 16 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^2}{3}-1$ *şeklinde tanımlanan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $(0,2)$ aralığında en az bir kökü olduğunu gösterelim.*

Çözüm. $f(0)=-1<0$ ve $f(2)=\dfrac{13}{3}>0$ dır. Bu durumda $f(0)f(2)<0$ olduğundan Sonuç 5 gereğince fonksiyonun $(0,2)$ aralığında bir kökü vardır. Şekil ? ya bakınız.✍

Örnek 17 $f(x)=\sin x$ *şeklinde tanımlı* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonunun* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *aralığında bir kökünün olduğunu gösterelim.*

Çözüm. $f(x)=\sin x$ fonksiyonu reel eksen üzerinde süreklidir. $f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=-1<0$ ve $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$ dir. Bu durumda $f\left(\frac{-\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ olduğundan Sonuç 5 gereğince fonksiyonun $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında bir kökü vardır. Şekil ? ye bakınız.✍

Örnek 18

$$a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \tag{1}$$

eşitliğinin en az bir kökünün olduğunu gösterelim.

Çözüm.

$$f(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

şeklinde tanımlı $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu gözönüne alalım. f fonksiyonu reel eksen üzerinde süreklidir. $a_{2n+1}>0$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty, \text{ ve } \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

olur. Böylece, $a < b$ ve $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ olacak şekilde a, b sayıları mevcuttur. Sonuç 5 gereğince $f(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ sayısı mevcuttur. Yani (1) eşitliğinin en az bir kökü vardır. $a_{2n+1} < 0$ ise benzer şekilde (1) eşitliğinin en az bir kökü olduğu gösterilir. ✍

Sonuç 6 *$f : [a, b] \to [a, b]$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in [a, b]$ noktası vardır.*

Sonuç 7 *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f([a, b])$ kapalı ve sınırlı bir aralıktır.*

Teorem 8 *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. f nin bire-bir olması için gerek ve yeter şart f nin kesin artan veya kesin azalan olmasıdır.*

Ters Fonksiyonların Sürekliliği

Teorem 9 *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bire-bir olsun. Bu durumda f sürekli ise $f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$ fonksiyonu süreklidir.*

Süreksizlik Noktaları

Tanım 3 x_0 *noktası* A *nın bir limit noktası olmak üzere* $f : A \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun.*

Örnek 19 *Aşağıdaki fonksiyonlarının birinci cinsten süreksizlik noktalarını ve sıçramalarını bulalım.*

$$\left| f\left(\frac{\pi}{2}^{+}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}^{-}\right) \right|$$

$$\left|f\left(\frac{2}{3}^{+}\right)-f\left(\frac{2}{3}^{-}\right)\right|$$