Mahmut KOÇAK

 mkocak@ogu.edu.tr
Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

http://www2.ogu.edu.tr/~mkocak/
Sunum Tarihi: Nisan 17, 2008

Dikdörtgen Kuralı

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ integrali Riemann toplamlarının bir limiti olduğundan $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ integralinin yaklaşık değeri olarak herhangi bir Riemann toplamı alınabilir. $[a,b]$ aralığını $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ olmak üzere $i=0,1,2,\cdots,n$ için $x_i=a+i\Delta x$ noktalarından n tane eşit uzunlukta alt aralığa bölelim. Bu durumda $i=1,2,\cdots,n$ için $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cong \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \tag{1}$$

olur.

Sol uç nokta yaklaşımı (1) de her $i=1,2,\cdots,n$ için $t_i=x_{i-1}$ olarak seçilirse

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cong \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

olur. $L_n=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$ denilirse $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cong L_n$ olur. Buna yönteme **sol uç nokta yaklaşımı** denir. Şekil ?? ye bakınız.

(1) de her $i=1,2,\cdots,n$ için $t_i=x_i$ olarak seçilirse

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cong \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

olur. $R_n=\Delta x \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$ denilirse $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cong R_n$ olur. Buna yönteme **sağ uç nokta yaklaşımı** denir. Şekil ? ye bakınız.

Orta nokta yaklaşımı (1) de her $i=1,2,\cdots,n$ için t_i, $[x_{i-1},x_i]$ aralığının orta noktası yani $t_i=\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$ olarak seçilirse

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cong \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(t_i)$$

olur. $M_n=\Delta x \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)$ denilirse $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cong M_n$ olur. Buna yönteme **orta nokta yaklaşımı** denir. Şekil ? ye bakınız.

Yamuk Kuralı

Yamuk kuralı integrale dikdörtgenler yerine yamuklarla yaklaşma metodudur. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $[a,b]$ aralığını $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ olmak üzere $i=0,1,2,\cdots,n$ için $x_i=a+i\Delta x$ noktalarından n tane eşit uzunlukta alt aralığa bölelim. Bu durumda f nin $[x_{i-1},x_i]$ aralığı üzerindeki integrali yaklaşık olarak

$$\Delta x\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$$

dir. Yani

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x \cong \Delta x\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\cong \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x \cong \sum_{i=1}^{n}\Delta x\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}=\frac{\Delta x}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_{i-1})+f(x_i)\big)\\ &= \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]\end{aligned}$$

olur.

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

denilirse $T_n = \dfrac{L_n+R_n}{2}$ ve

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cong T_n = \frac{L_n+R_n}{2}$$

olur. Şekil ?? ye bakınız. Buna yönteme **yamuk kuralı** denir.

Simpson Kuralı

Lineer (doğrusal) olmayan herhangi üç noktadan bir parabol geçer. Simpson kuralı integrale parabollerle yaklaşma metodudur. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun. n bir çift doğal sayı ve $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ olmak üzere $[a,b]$ aralığını $i=0,1,2,\cdots,n$ için $x_i=a+i\Delta x$ noktalarından n tane eşit uzunlukta alt aralığa bölelim. $[x_{i-1},x_i]$ ve $[x_i,x_{i+1}]$ alt aralıklarını göz önüne alalım. $[x_{i-1},x_{i+1}]$ aralığında f fonksiyonuna parabolla yaklaşalım. $P_{i-1}(x_{i-1},f(x_{i-1}))$, $P_i(x_i,f(x_i))$ ve $P_{i+1}(x_{i+1},f(x_{i+1}))$ noktalarından geçen parabolün denklemi

$$y=Ax^2+Bx+C$$

formundadır. Böylece

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \cong \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(Ax^2+Bx+C\right)\mathrm{d}x$$

Dikdörtgen . . .
Yamuk Kuralı
Simpson Kuralı
Hata Hesabı
Örnek 1

dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(Ax^2+Bx+C\right) \mathrm{d}x &= \left(A\frac{x^3}{3}+B\frac{x^2}{2}+Cx\right)\Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} = \left(A\frac{x^3}{3}+B\frac{x^2}{2}+Cx\right)\Big|_{x_i-\Delta x}^{x_i+\Delta x} \\
&= \frac{A}{3}\left((x_i+\Delta x)^3-(x_i-\Delta x)^3\right)+\frac{B}{2}\left((x_i+\Delta x)^2-(x_i-\Delta x)^2\right)+2(\Delta x)C \\
&= \frac{A}{3}2\Delta x\left((\Delta x)^2+3x_i^2\right)+2B(\Delta x)x_i+2(\Delta x)C \\
&= \frac{\Delta x}{3}2A\left((\Delta x)^2+3x_i^2\right)+\frac{6B}{3}(\Delta x)x_i+\frac{6}{3}(\Delta x)C \\
&= \frac{\Delta x}{3}(2A\left((\Delta x)^2+3x_i^2\right)+6Bx_i+6C) \\
&= \frac{\Delta x}{3}(2A(\Delta x)^2+6Ax_i^2+6Bx_i+6C)
\end{aligned}$$

olur. $y = Ax^2+Bx+C$ parabolü $P_i(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $P_i(x_i, f(x_i))$ ve $P_{i+1}(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ noktalarından geçtiğinden $x_{i-1} = x_i - \Delta x$ ve $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ olduğuda göz önüne alınırsa

$$f(x_{i-1}) = f(x_i-\Delta x) = A(x_i-\Delta x)^2+B(x_i-\Delta x)+C = A(\Delta x)^2-2A(\Delta x)x_i-B(\Delta x)+Ax_i^2+Bx_i+C,$$

$$f(x_i) = Ax_i^2+Bx_i+C, \quad 4f(x_i) = 4Ax_i^2+4Bx_i+4C$$

ve

$$f(x_{i+1}) = f(x_i+\Delta x) = A(x_i+\Delta x)^2+B(x_i+\Delta x)+C = A(\Delta x)^2+2A(\Delta x)x_i+B(\Delta x)+Ax_i^2+Bx_i+C$$

olur. Bu durumda

$$f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})=2A(\Delta x)^2+6Ax_i^2+6Bx_i+6C$$

olur. Böylece

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left(Ax^2+Bx+C\right)\mathrm{d}x=\frac{\Delta x}{3}\left(2A(\Delta x)^2+6Ax_i^2+6Bx_i+6C\right)=\frac{\Delta x}{3}\left(f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})\right)$$

olur. Bu durumda

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\cong\frac{\Delta x}{3}(f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1}))$$

olur. Böylece

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_{x_{n-4}}^{x_{n-2}} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\cong \frac{\Delta x}{3}\big[(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))+(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4))+(f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6))\\&\quad+\cdots+(f(x_{n-4})+4f(x_{n-3})+f(x_{n-2}))+(f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n))\big]\\&\cong \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]\end{aligned}$$

olur.

$$S_n=\frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

denilirse $\int_a^b f(x)\,d \cong S_n$ olur. Şekil ?? ve Şekil ?? ye bakınız. Bu yönteme **Simpson kuralı** denir.

Hata Hesabı

- ⋆ Orta Nokta yönteminde Yapılan Hata: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilen ve 1. mertebeden sürekli türevi ve 2. mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda f sınırlı ise orta nokta yönteminde yapılan hata için bir alt ve üst sınır belirlenebilir. $[a,b]$ aralığında f fonksiyonunun ikinci türevinin maksimumu M olsun. Orta nokta yönteminde yapılan hatayı E_O ile gösterelim. Bu durumda $|E_O| \le \dfrac{(b-a)^3 M}{24n^2}$ olur.

- ⋆ Yamuk Kuralında Yapılan Hata: f fonksiyonunun ikinci türevi var ve sınırlı ise yamuk kuralı ile yapılan hesap hataları için bir alt ve üst sınır aşağıdaki şekilde belirlenebilir. Yamuk kuralını kullanarak $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ integrali hesaplarken yapılan hata

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} m \le E_T \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M$$

olur. Yamuk kuralında yapılan hata

$$E_T = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_n$$

ile bulunur.

Örnek 1

$\int_1^2 x^2\,dx$ integralinin yaklaşık değerini $n=5$ için

⋆ Orta nokta kurallarını kullanarak bulalım.

⋆ Yamuk kurallarını kullanarak bulalım.

⋆ Integralin gerçek değeri

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3-1^3) = \frac{7}{3}$$

dür.

$a=1,\ b=2$ ve $\Delta x = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$ dir. Bu durumda

$$x_0=1,\ x_1=1.2,\ x_2=1.4,\ x_3=1.6,\ x_4=1.8,\ x_5=2$$

dir.

i	x_{i-1}	x_i	t_i	$f(t_i)=t_i^2$

i	$x_i = 1 + i\Delta x$	$f(x_i) = x_i^2$	m_i	$m_i f(x_i)$