



Dikdörtgen . . .
Yamuk Kuralı
Simpson Kuralı
Hata Hesabı
Örnek 1

Mahmut KOÇAK





Dikdörtgen Kuralı

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $\int_a^b f(x) dx$ integrali Riemann toplamlarının bir limiti olduğundan $\int_a^b f(x) dx$

integralinin yaklaşık değeri olarak herhangi bir Riemann toplamı alınabilir. $[a, b]$ aralığını $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $x_i = a + i\Delta x$ noktalarından n tane eşit uzunlukta alt aralığa bölelim. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, n$ için $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^n f(t_i) \quad (1)$$

olur.

Sol uç nokta yaklaşımı (1) de her $i = 1, 2, \dots, n$ için $t_i = x_{i-1}$ olarak seçilirse

$$\int_a^b f(x) dx \cong \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})$$

olur. $L_n = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})$ denilirse $\int_a^b f(x) dx \cong L_n$ olur. Buna yöntem **sol uç nokta yaklaşımı** denir. **Şekil ?** ye bakınız.

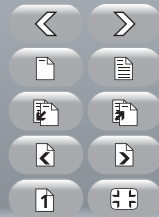
Dikdörtgen ...

Yamuk Kuralı

Simpson Kuralı

Hata Hesabı

Örnek 1





(1) de her $i = 1, 2, \dots, n$ için $t_i = x_i$ olarak seçilirse

$$\int_a^b f(x) dx \cong \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

olur. $R_n = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_i)$ denilirse $\int_a^b f(x) dx \cong R_n$ olur. Buna yönteme **sağ uç nokta yaklaşımı** denir. **Şekil ?** ye bakınız.

Orta nokta yaklaşımı (1) de her $i = 1, 2, \dots, n$ için t_i , $[x_{i-1}, x_i]$ aralığının orta noktası yani $t_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ olarak seçilirse

$$\int_a^b f(x) dx \cong \Delta x \sum_{i=1}^n f(t_i)$$

olur. $M_n = \Delta x \sum_{i=1}^n f(t_i)$ denilirse $\int_a^b f(x) dx \cong M_n$ olur. Buna yönteme **orta nokta yaklaşımı** denir. **Şekil ?** ye bakınız.

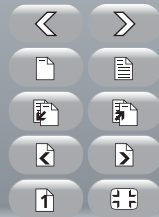
Dikdörtgen ...

Yamuk Kuralı

Simpson Kuralı

Hata Hesabı

Örnek 1





Yamuk Kuralı

Yamuk kuralı integrale dikdörtgenler yerine yamuklarla yaklaşma metodudur. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

$[a, b]$ aralığını $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $x_i = a + i\Delta x$ noktalarından n tane eşit uzunlukta alt aralığa bölelim.

Bu durumda f nin $[x_{i-1}, x_i]$ aralığı üzerindeki integrali yaklaşık olarak

$$\Delta x \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

dir. Yani

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \cong \Delta x \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\cong \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n \Delta x \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \\ &= \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned}$$

olur.

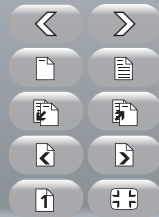
Dikdörtgen ...

Yamuk Kuralı

Simpson Kuralı

Hata Hesabı

Örnek 1






$$T_n = \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

denilirse $T_n = \frac{L_n + R_n}{2}$ ve

$$\int_a^b f(x) dx \cong T_n = \frac{L_n + R_n}{2}$$

olur. **Şekil**  ye bakınız. Buna yöntem **yamuk kuralı** denir.

Dikdörtgen . . .

Yamuk Kuralı

Simpson Kuralı

Hata Hesabı

Örnek 1





Simpson Kuralı

Lineer (doğrusal) olmayan herhangi üç noktadan bir parabol geçer. Simpson kuralı integrale parabollerle yaklaşma metodudur.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun. n bir çift doğal sayı ve $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere $[a, b]$ aralığını $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $x_i = a + i\Delta x$ noktalarından n tane eşit uzunlukta alt aralığa bölelim. $[x_{i-1}, x_i]$ ve $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralıklarını göz önüne alalım. $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ aralığında f fonksiyonuna parabolle yaklaşalım. $P_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $P_i(x_i, f(x_i))$ ve $P_{i+1}(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ noktalarından geçen parabolün denklemi

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

formundadır. Böylece

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx \cong \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Ax^2 + Bx + C) dx$$

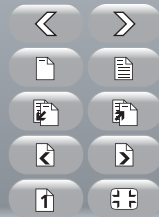
Dikdörtgen ...

Yamuk Kuralı

Simpson Kuralı

Hata Hesabı

Örnek 1





dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Ax^2 + Bx + C) dx &= \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx \right) \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} = \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx \right) \Big|_{x_i - \Delta x}^{x_i + \Delta x} \\
 &= \frac{A}{3} \left((x_i + \Delta x)^3 - (x_i - \Delta x)^3 \right) + \frac{B}{2} \left((x_i + \Delta x)^2 - (x_i - \Delta x)^2 \right) + 2(\Delta x)C \\
 &= \frac{A}{3} 2\Delta x \left((\Delta x)^2 + 3x_i^2 \right) + 2B(\Delta x)x_i + 2(\Delta x)C \\
 &= \frac{\Delta x}{3} 2A \left((\Delta x)^2 + 3x_i^2 \right) + \frac{6B}{3} (\Delta x)x_i + \frac{6}{3} (\Delta x)C \\
 &= \frac{\Delta x}{3} (2A \left((\Delta x)^2 + 3x_i^2 \right) + 6Bx_i + 6C) \\
 &= \frac{\Delta x}{3} (2A(\Delta x)^2 + 6Ax_i^2 + 6Bx_i + 6C)
 \end{aligned}$$

olur. $y = Ax^2 + Bx + C$ parabolü $P_i(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $P_i(x_i, f(x_i))$ ve $P_{i+1}(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ noktalarından geçtiğinden $x_{i-1} = x_i - \Delta x$ ve $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ olduğuda göz önüne alınırsa

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - \Delta x) = A(x_i - \Delta x)^2 + B(x_i - \Delta x) + C = A(\Delta x)^2 - 2A(\Delta x)x_i - B(\Delta x) + Ax_i^2 + Bx_i + C,$$

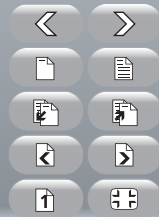
$$f(x_i) = Ax_i^2 + Bx_i + C, \quad 4f(x_i) = 4Ax_i^2 + 4Bx_i + 4C$$

ve

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + \Delta x) = A(x_i + \Delta x)^2 + B(x_i + \Delta x) + C = A(\Delta x)^2 + 2A(\Delta x)x_i + B(\Delta x) + Ax_i^2 + Bx_i + C$$

olur. Bu durumda

Dikdörtgen ...
Yamuk Kuralı
Simpson Kuralı
Hata Hesabı
Örnek 1





$$f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}) = 2A(\Delta x)^2 + 6Ax_i^2 + 6Bx_i + 6C$$

olur. Böylece

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Ax^2 + Bx + C) dx = \frac{\Delta x}{3} (2A(\Delta x)^2 + 6Ax_i^2 + 6Bx_i + 6C) = \frac{\Delta x}{3} (f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

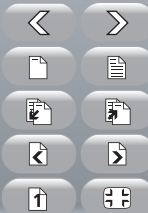
olur. Bu durumda

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx \cong \frac{\Delta x}{3} (f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

olur. Böylece

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-4}}^{x_{n-2}} f(x) dx + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

Dikdörtgen ...
Yamuk Kuralı
Simpson Kuralı
Hata Hesabı
Örnek 1



olduğundan

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\cong \frac{\Delta x}{3} [(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + (f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)) \\ &\quad + \cdots + (f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})) + (f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))] \\ &\cong \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned}$$

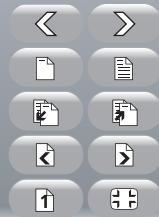
olur.

$$S_n = \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

denilirse $\int_a^b f(x) dx \cong S_n$ olur. **Şekil ?** ve **Şekil ?** ye bakınız. Bu yöntemeye **Simpson kuralı** denir.



Dikdörtgen ...
Yamuk Kuralı
Simpson Kuralı
Hata Hesabı
Örnek 1





Hata Hesabı

★ Orta Nokta yönteminde Yapılan Hata: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilen ve 1. mertebeden sürekli türevi ve 2. mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda f sınırlı ise orta nokta yönteminde yapılan hata için bir alt ve üst sınır belirlenebilir. $[a, b]$ aralığında f fonksiyonunun ikinci türevinin maksimumu M olsun. Orta nokta yönteminde yapılan hatayı E_D ile gösterelim. Bu durumda $|E_D| \leq \frac{(b-a)^3 M}{24n^2}$ olur.

★ Yamuk Kuralında Yapılan Hata: f fonksiyonunun ikinci türevi var ve sınırlı ise yamuk kuralı ile yapılan hesap hataları için bir alt ve üst sınır aşağıdaki şekilde belirlenebilir. Yamuk kuralını kullanarak $\int_a^b f(x) dx$ integrali hesaplanırken yapılan hata

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} m \leq E_T \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M$$

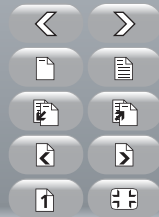
olur. Yamuk kuralında yapılan hata

$$E_T = \int_a^b f(x) dx - T_n$$

ile bulunur.

Dikdörtgen ...
Yamuk Kuralı
Simpson Kuralı
Hata Hesabı

Örnek 1





Dikdörtgen . . .

Yamuk Kuralı

Simpson Kuralı

Hata Hesabı

Örnek 1





Örnek 1

$\int_1^2 x^2 dx$ integralinin yaklaşık değerini $n=5$ için

- ★ Orta nokta kurallarını kullanarak bulalım.
- ★ Yamuk kurallarını kullanarak bulalım.
- ★ Integralin gerçek değeri

$$\int_1^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$$

dür.

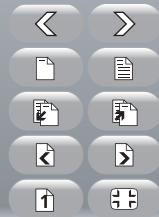
$a=1$, $b=2$ ve $\Delta x = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$ dir. Bu durumda

$$x_0 = 1, x_1 = 1.2, x_2 = 1.4, x_3 = 1.6, x_4 = 1.8, x_5 = 2$$

dir.

Dikdörtgen ...
Yamuk Kuralı
Simpson Kuralı
Hata Hesabı

Örnek 1





Dikdörtgen . . .
Yamuk Kuralı
Simpson Kuralı
Hata Hesabı

Örnek 1

i	x_{i-1}	x_i	t_i	$f(t_i) = t_i^2$





i	$x_i = 1 + i\Delta x$	$f(x_i) = x_i^2$	m_i	$m_i f(x_i)$

Dikdörtgen ...
Yamuk Kuralı
Simpson Kuralı
Hata Hesabı

Örnek 1

