OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

ALAN HESABI

Mahmut KOÇAK

7 Nisan 2008

Sürüm 1.0

1. Teori

1.1. Eğri ile x-ekseni Arasına Kalan Bölgenin Alanı

- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli pozitif değerli bir fonksiyon olsun. $[a,b]$ aralığınının bir bölüntüsü

$$P=\{a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{n-1},x_n=b\}$$

olsun. Bu durumda f nin grafiği, x-ekseni, $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ olmak üzere taban uzunluğu $\Delta x_i=(x_i-x_{i-1})$ ve yüksekliği $f(t_i)$ olan dikdörtgenlerin alanları toplamına yaklaşık olarak eşittir. Şekil Bas a bakınız. Yani

$$A\cong\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x_i$$

dir. Diğer taraftan f nin $[a,b]$ aralığına karşılık gelen Riemann toplamı

$$R(P,\{t_i\},f)=\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x_i$$

dir. f integrallenebilir olduğundan $\|P\|=\max\{|x_i-x_{i-1}|:i:1,2,3,\cdots,n\}$ olmak üzere

$$\lim_{\|P\|\to 0}R(P,\{t_i\},f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Osmangazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Mahmut Koçak

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Dök Dök ▶
Geri Kapat

dir. Bu durumda

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

olur.

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli negatif değerli bir fonksiyon ise f nin grafiği, x-ekseni, $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

olur.

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli negatif ve pozitif değerler alan bir fonksiyon ise f nin grafiği, x-ekseni, $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = \int_a^b \left| f(x) \right| \mathrm{d}x$$

olur.

Osmangazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Mahmut Koçak

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Dök Dök ▶
Geri Kapat

1.2. İki Eğri Arasında Kalan Bölgenin Alanı

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli iki fonksiyon ve her $x\in[a,b]$ için $f(x)\leq g(x)$ olsun. $[a,b]$ aralığınının bir bölüntüsü

$$P=\{a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{n-1},x_n=b\}$$

olsun. Bu durumda f nin grafiği, g nin grafiği, x-ekseni, $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ olmak üzere taban uzunluğu $\Delta x_i=(x_i-x_{i-1})$ ve yüksekliği $g(t_i)-f(t_i)$ olan dikdörtgenlerin alanları toplamına yaklaşık olarak eşittir. Yani

$$A\cong\sum_{i=1}^{n}(g(t_i)-f(t_i))\Delta x_i$$

dir. Şekil Bas a bakınız.

Diğer taraftan $g-f$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığına karşılık gelen Riemann toplamı

$$R(P,\{t_i\},g-f)=\sum_{i=1}^{n}(g(t_i)-f(t_i))\Delta x_i$$

dir. $g-f$ integrallenebilir olduğundan $\|P\|=\max\{|x_i-x_{i-1}|:i:1,2,3,\cdots,n\}$ olmak üzere

$$\lim_{\|P\|\to 0}R(P,\{t_i\},g-f)=\int_a^b(g(x)-f(x))\,\mathrm{d}\,x$$

Osmangazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Mahmut Koçak

dir. Bu durumda

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}\,x$$

olur.

Daha genel olarak $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli iki fonksiyon ise f nin grafiği, g nin grafiği, x-ekseni, $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = \int_a^b \left| g(x) - f(x) \right| \mathrm{d}\,x$$

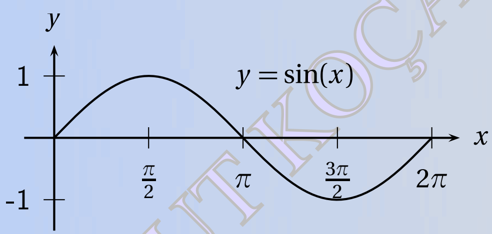
olur. Şekil Bas a bakınız.

2. Örnekler

Aşağıdaki örnekleri dikkatlice inceleyiniz. Adım adım örneklerde "Adım adım örnek" döğmesine basınız. `shift-click` e basarak geri adım atabilirsiniz. ‘?’ işareti gözüken yerlerde fareyi ‘?’ işaretinin üzerine getirerek yardım alabilirsiniz.

Osmangazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Mahmut Koçak

Örnek 1. $f(x) = \sin(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = 0$, $x = b$ ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulalım.



$=$

$=$

$=$

Adım adım örnek

Osmangazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Mahmut Koçak

◄◄ ►►
◄ ►
◄ Dök Dök ►
Geri Kapat

Örnek 2. $f(x)=x^2$ ve $g(x)=2x-x^2$ fonksiyonlarının grafiği ile sınırlı bölgenin alanını bulalım.

- Önce f ve g nin kesim noktalarını bulalım. Bunun için önce $f(x)=g(x)$ eşitliğini çözmeliyiz. Bu eşitliği çözersek $x=0$ veya $x=1$ olur.
- $x\in[0,1]$ için $g(x)\geq f(x)$ olduğundan (Grafik) $x\in[0,1]$ için $|g(x)-f(x)|=g(x)-f(x)$ olur
- Buna göre istenilen (taralı) alan

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|g(x)-f(x)\right| dx &= \int_0^1 (g(x)-f(x))dx \\ &= \int_0^1 (2x-x^2-x^2)dx \\ &= \int_0^1 (2x-2x^2)dx \\ &= \left(x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

olur.

Osmangazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Mahmut Koçak

Örnek 3. $f(x) = -(x-3)^2 + 4$ ve $g(x) = -\frac{1}{5}(x-2)^2 + 3$ fonksiyonlarının grafiği, $x = 1$ ve $x = 5$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını bulalım.

- Önce f ve g nin kesim noktalarını bulalım. Bunun için önce $f(x) = g(x)$[?] eşitliğini çözmeliyiz. Bu eşitliği çözersek $x = 0$ veya $x = \frac{9}{2} = 4.5$ olur.
- $x \in [1,2]$ için $g(x) \geq f(x)$ olduğundan (Grafik)[?] $x \in [1,2]$ için
$$|g(x) - f(x)| = g(x) - f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{26}{5}x + \frac{36}{5}$$
olur
- $x \in [2,4.5]$ için $f(x) \geq g(x)$ olduğundan (Grafik)[?] $x \in [2,4.5]$ için
$$|g(x) - f(x)| = f(x) - g(x) = -\frac{4}{5}x^2 + \frac{26}{5}x - \frac{36}{5}$$
olur
- $x \in [4.5,5]$ için $g(x) \geq f(x)$ olduğundan (Grafik)[?] $x \in [4.5,5]$ için
$$|g(x) - f(x)| = g(x) - f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{26}{5}x + \frac{36}{5}$$
olur

Osmangazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Mahmut Koçak

◄◄ ►►
◄ ►
◄ Dök Dök ►
Geri Kapat

- Buna göre istenilen (taralı) alan

$$
\begin{aligned}
\int_1^5 \left|g(x)-f(x)\right| dx &= \int_1^2 \left|g(x)-f(x)\right| dx + \int_2^{4.5} \left|g(x)-f(x)\right| dx + \int_{4.5}^5 \left|g(x)-f(x)\right| dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{4}{5}x^2 - \frac{26}{5}x + \frac{36}{5}\right) dx + \int_2^{4.5} \left(-\frac{4}{5}x^2 + \frac{26}{5}x - \frac{36}{5}\right) dx + \int_{4.5}^5 \left(\frac{4}{5}x^2 - \frac{26}{5}x + \frac{36}{5}\right) dx \\
&= \left(\frac{4}{15}x^3 - \frac{26}{10}x^2 + \frac{36}{5}x\right)\Big|_1^2 + \left(-\frac{4}{15}x^3 + \frac{26}{10}x^2 - \frac{36}{5}x\right)\Big|_2^{4.5} + \left(\frac{4}{15}x^3 - \frac{26}{10}x^2 + \frac{36}{5}x\right)\Big|_{4.5}^5 \\
&= \frac{19}{15} + \frac{25}{12} + \frac{17}{60} = \frac{109}{30}
\end{aligned}
$$

olur.

Osmangazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Mahmut Koçak