Hacim Hesabı

Dönel Cismin Hacmi

$\mathbb{R}^3$ de verilen bir C cisminin $x=a$ ve $x=b$ düzlemleri arasında kalan parçasının hacmini hesaplamaya çalışalım. $x\in[a,b]$ için apsisi x olan x-eksenine dik düzlemle cismin arakesitinin alanı $A(x)$ olsun. Bu durumda $A(x)$, x in bir fonksiyonudur. $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü$P=\{a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{n-1},x_n=b\}$ olsun. $V(C)$ cismin hacmi ve C cisminin $x=x_{i-1}$ ve $x=x_i$ düzlemleri arasında kalan hacmi $V(C_i)$ olsun. Bu durumda $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ olmak üzere $V(C_i)$ hacmi yaklaşık olarak $\Delta x_i A(t_i)$ dir. Yani $V(C_i)\cong\Delta x_i A(t_i)$ dir. Bu durumda cismin toplam hacmi yaklaşık olarak $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i A(t_i)$ ve böylece

$V(C)\cong\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i A(t_i)$ dir. $A(x)$ sürekli bir fonksiyon ise $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i A(t_i)$ toplamı $A(x)$ fonksiyonunun, $[a,b]$ aralığının P bölüntüsünün $\{t_i\}$ nokta seçimine karşılık gelen Riemann toplamı olur. Böylece

$$\|P\|=\max\{|x_i-x_{i-1}|:i:1,2,3,\cdots,n\}$$

olmak üzere

$$\lim_{\|P\|\to 0}R(P,\{t_i\},A(x))=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

olduğundan

$$V(C)=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

olur. Şekil ? a bakınız.

Disk Metodu

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. f nin grafiğinin $x=a$, $x=b$ doğrularıyla sınırlanan parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen C cisminin hacmini bulmaya çalışalım. $x\in[a,b]$ için apsisi x olan x-eksenine dik düzlemle cismin arakesiti yarı çapı $(f(x))^2$ olan bir dairedir. Şekil ?? ve Şekil ?? e bakınız. Yarıçapı r olan bir dairenin alanı πr^2 olduğundan $A(x)=\pi(f(x))^2$ dir. Buna göre cismin hacmi

$$V(C)=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

olur.

Benzer şekilde f , $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve her $x\in[a,b]$ için $0\le g(x)\le f(x)$ ise f ve g nin grafiklerinin $x=a$, $x=b$ doğruları arasında kalan parçalarının x-eksini etrafında döndürülmesiyle elde edilen C cisminin hacmi

$$V(C)=\pi\int_a^b \left((g(x))^2-(f(x))^2\right)\mathrm{d}x$$

integraliyle bulunur. Bu yönteme **disk metodu** denir.

Örnek 1

$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğinin $x = 0$ ve $x = 4$ düzlemleri arasında kalan parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım. Şekil ?? ye bakınız.

⋆ $x \in [a,b]$ için apsisi x olan x-eksenine dik düzlemle cismin arakesi yarı çapı $\sqrt{x}$ olan bir dairedir.

⋆ Buna göre $A(x) = \pi r^2 = \pi(\sqrt{x})^2 = x$ olur.

⋆ Bu durumda

$$V(C) = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^4 \pi x\,dx = \pi\frac{x^2}{2} = \frac{\pi}{2}x^2\Big|_0^4 = \frac{\pi}{2}(4^2) = \frac{\pi}{2}16 = \frac{\pi}{8}$$

olur.

Örnek 2

$f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinin $x = 0$ ve $x = 2$ düzlemleri arasında kalan parçasının y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım. Şekil ?? ye bakınız.

⋆ $x \in [0,8]$ için ordinatı y olan y-eksenine dik düzlemle cismin arakesi yarı çapı $\sqrt[3]{y}$ olan bir dairedir.

⋆ Buna göre $A(y) = \pi r^2 = \pi(\sqrt[3]{y})^2 = y^{2/3}$ olur.

⋆ Bu durumda

$$V(C) = \int_0^8 A(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,\mathrm{d}y = \pi \frac{3}{5} y^{5/3}\Big|_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

olur.