Hacim Hesabı

© 2008 mkocak@ogu.edu.tr
Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

http://www2.ogu.edu.tr/~mkocak/
Sunum Tarihi: Nisan 17, 2008

Kabuk Metodu (Silindirik Kabuklar Metodu)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. f nin grafiğinin $x=a$, $x=b$ doğrularıyla sınırlanan parçasının y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen C cisminin hacmini bulmaya çalışalım.

$P=\{a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{n-1},x_n=b\}$, $[a,b]$ aralığınının $\triangle x=\dfrac{b-a}{n}$ özelliğinde bir bölüntüsü olsun. x-ekseni, fonksiyonun grafiği ve $x=x_{i-1},x=x_i$ doğruları arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle t_i, $[x_{i-1},x_i]$ aralığının orta noktası olmak üzere yarı çapı t_i ve yüksekliği $f(t_i)$ olan silindir oluşur. Bu silindir Şekil ?? de görüldüğü gibi açılırsa hacmi $2\pi t_i f(t_i)$ olur. Bu durumda

$$V(C)\cong\sum_{i=1}^{n}2\pi t_i f(t_i)\triangle x$$

olur. Böylece

$$V(C)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\pi t_i f(t_i)\triangle x=2\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}t_i f(t_i)\triangle x=2\pi\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$$

olur. ve Şekil ?? ye bakınız.

Kabuk Metodu
Örnek 3
Örnek 4

Benzer şekilde $f\ ,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve her $x\in[a,b]$ için $0\le g(x)\le f(x)$ ise f ve g nin grafiklerinin $x=a$, $x=b$ doğruları arasında kalan parçalarının y-eksini etrafında döndürülmesiyle elde edilen C cisminin hacmi

$$V(C)=2\pi\int_a^b x\,(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$$

integraliyle bulunur. Şekil ?? ve Şekil ?? ye bakınız.

Bu yönteme **kabuk metodu** denir.

Örnek 3

$y=0$ doğrusu ile $f(x)=4x-x^2$ fonksiyonunun grafiği arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım. Şekil ?? ye bakınız.

⋆ f fonksiyonunun grafiği x-eksenini $x=0$ ve $x=4$ noktalarında keser. Bas ??

⋆ Buna göre

$$V(C)=2\pi\int_0^4 x\left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^4\left(4x^2-x^3\right)\mathrm{d}x=2\pi\left(\frac{4x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^4=\frac{128}{3}\pi$$

olur.

Örnek 4

$f(x) = 3x^2 - x^3$ fonksiyonunun grafiğinin $x = 0$ ve $x = 3$ doğruları arasında kalan parçasının y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım. Şekil ? ye bakınız.

⋆ Buna göre

$$V(C) = 2\pi \int_0^3 x\left(3x^2 - x^3\right) dx = 2\pi \int_0^3 \left(3x^3 - x^4\right) dx = 2\pi \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^3 = \frac{243}{10}\pi$$

olur.