ANALİZ II

Yüzey Alanı

Mahmut KOÇAK

Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

Osmangazi Üniversitesi
Sunum Tarihi: 14 Nisan 2008

Dönel Cismin Yüzey Alanı

Yan yüksekliği h ve taban yarı çapı r olan bir silindiri göz önüne alalım. Silindir Şekil da görüldüğü gibi açıldığında yüksekliği h ve taban uzunluğu $2\pi r$ olan bir dikdörtgen olur. Bu dikdörtgenin alanı $2\pi rh$ olduğundan silindirin yüzey alanı $2\pi rh$ olur.

Şekil de görüldüğü gibi yan kenar uzunluğu h ve yarı çapı r olan dairesel bir koniyi göz önüne alalım. Koni açılırsa yarı çapı h ve yay uzunluğu $s = 2\pi r$ olan bir daire dilimi elde edilir. Bu daire diliminin alanı $A = \frac{1}{2}sh = \pi rh$ olduğundan koninin yüzey alanı $A_{\text{koni}} = \pi rh$ olur.

Şekil da görünen kesik koni parçasının yüzey alanını bulalım. Benzer üçgenlerden dolayı

$$\frac{r_1}{h_1} = \frac{r_1 - r_2}{h}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} A &= A_1 - A_2 = \pi r_1 h_1 - \pi r_2 h_2 = \pi r_1 h_1 + \pi r_2 (h - h_1) = \pi r_1 h_1 + \pi r_2 h - \pi r_2 h_1 = \pi h_1 (r_1 - r_2) + \pi r_2 h \\ &= \pi h_1 \left(\frac{r_1 h}{h_1}\right) + \pi r_2 h = \pi r_1 h + \pi r_2 h = \pi (r_1 + r_2) h \end{aligned}$$

olur.

x-ekseni Etrafında Döndürülen Dönel Cismin Yüzey Alanı

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. f nin grafiği, $x=a$ ve $x=b$ doğrularıyla sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen C cisminin A yüzey alanını bulmaya çalışalım.

$P=\{a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{n-1},x_n=b\}$, $[a,b]$ aralığınının bir bölüntüsü olsun. f nin grafiğinin $x=x_{i-1}$ ve $x=x_i$ doğruları arasındaki parçasının yay uzunluğu $\triangle l_i$ ve f nin grafiğinin, $x=x_{i-1}$ ve $x=x_i$ doğruları arasındaki yay parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan C_i cisminin yüzey alanı $A_i(x_i)$ olsun. Bu parçanın yüzey alanı ile $t\in[x_{i-1},x_i]$ olmak üzere yarı çapı $f(t)$ ve yüksekliği $\triangle x_i$ olan silindirin yüzey alanı yaklaşık olarak eşittir. Yarıçapı $f(t)$ ve yüksekliği $\triangle x_i$ olan bir silindirin yüzey alanı $2\pi f(t)\triangle x_i$ ve $\triangle l_i\cong\triangle x_i$ olduğundan

$$A_i(x_i)\cong 2\pi f(t)\triangle x_i\cong 2\pi f(t)\triangle l_i$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\triangle l_i &\cong \triangle s_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}=\sqrt{(\Delta x_i)^2\left(1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x_i}\right)^2\right)}\\ &= \Delta x_i\sqrt{\left(1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x_i}\right)^2\right)}\end{aligned}$$

olur. Ortalama değer teoremi gereğince her $i=1,2,\cdots,n$ için $\triangle l_i\cong\Delta x_i\sqrt{1+(f'(t_i))^2}$ olacak şekilde $t_i\in(x_{i-1},x_i)$ olduğundan $A_i(x_i)\cong 2\pi f(t_i)\Delta x_i\sqrt{1+(f'(t_i))^2}$ olur. Şekil Şekil ve Şekil e bakınız.

Böylece

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i(x_i)\cong\sum_{i=1}^{n}2\pi f(t_i)\Delta x_i\sqrt{1+(f'(t_i))^2}=2\pi\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\sqrt{1+(f'(t_i))^2}\Delta x_i$$

olur. Eşitliğin sağındaki ifade $2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x)^2}$ fonksiyonunun P bölüntüsünün $\{t_i\}$ nokta seçimine karşılık gelen Riemann toplamıdır. Bu durumda $2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$ integrallenebilir olduğundan

$$\|P\|=\max\{|x_i-x_{i-1}|:i:1,2,3,\cdots,n\}$$

olmak üzere

$$\lim_{\|P\|\to 0}R\left(P,\{t_i\},2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\right)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

olduğundan

$$A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

olur.

y-ekseni Etrafında Döndürülen Dönel Cismin Yüzey Alanı

$f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. f nin grafiği, $x=a$ ve $x=b$ doğrularıyla sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen C cisminin A yüzey alanını bulmaya çalışalım.

$P=\{a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{n-1},x_n=b\}$, $[a,b]$ aralığınının bir bölüntüsü olsun. f nin grafiğinin $x=x_{i-1}$ ve $x=x_i$ doğruları arasındaki parçasının uzunluğu $\triangle l_i$ ve f nin grafiğinin, $x=x_{i-1}$ ve $x=x_i$ doğruları arasındaki parçasının y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan C_i cisminin yüzey alanı $A_i(x_i)$ olsun. Bu durumda $\triangle l_i\cong\triangle s_i$ olduğundan $A_i(x_i)$, yaklaşık olarak alt taban yarı çapı x_{i-1}, üst taban yarı çapı x_i ve kenar uzunluğu $\triangle l_i$ olan kesik koninin yüzey alanına eşittir. O halde

$$\begin{aligned} A_i(x_i) &\cong \pi(x_i+x_{i-1})\triangle l_i=\pi(x_i+x_{i-1})\sqrt{(\triangle x_i)^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2} \\ &= \pi(x_i+x_i-\triangle x_i)\triangle x_i\sqrt{1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\triangle x_i}\right)^2}\cong 2\pi x_i\sqrt{1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\triangle x_i}\right)^2}\triangle x_i \end{aligned}$$

olur. Ortalama değer teoremi gereğince $\dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\triangle x_i}=f'(t_i)$ olacak şekilde $t_i\in(x_{i-1},x_i)$ ve $t_i\cong x_i$ olduğundan

$$A_i(x_i)\cong 2\pi x_i\sqrt{1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\triangle x_i}\right)^2}\triangle x_i\cong 2\pi t_i\sqrt{1+(f'(t_i))^2}\triangle x_i$$

olur.

Dönel Cismin . . .
x-ekseni . . .
y-ekseni . . .
Dairesel Dik . . .
Kesik . . .

Bu durumda $2\pi x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$ integrallenebilir olduğundan $\|P\| = \max\{|x_i - x_{i-1}| : i : 1,2,3,\cdots,n\}$ olmak üzere

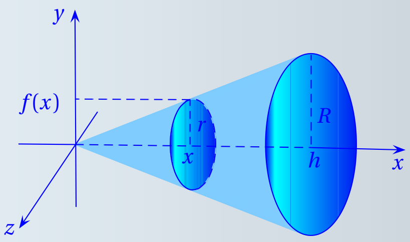
$$\lim_{\|P\|\to 0} R(P,\{t_i\}, 2\pi x\sqrt{1+(f'(x)^2})) = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

olduğundan

$$A = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

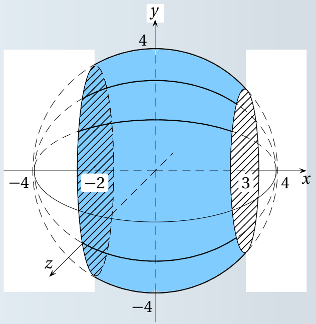
olur.

Dairesel Dik Koninin Yüzey Alanı



Taban yarıçapı R ve yükseklği h olan bir dik koninin yanal alanını R ve h cinsinden bulalım.

Kesik Kürenin Yüzey Alanı



$x^2+y^2+z^2=16$ küresinin $x=-2$ ve $x=3$ düzlemleriyle kesildiğinde meydana gelen küresel cismin yüzey alanını bulalım.