İKİ BOYUTLU KÜTLE

Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

http://www2.ogu.edu.tr/~mkocak/
Sunum Tarihi: Nisan 17, 2008

İki Boyutlu Kütle

I. Sabit yoğunluklu maddesel düzlem levhanın kütlesi:

Yoğunluğu ρ olan homojen bir maddesel düzlem levhanın kütlesi levhanın alanı A olmak üzere $m=\rho A$ olarak tanımlanır. Benzer şekilde üç boyutlu yoğunluğu ρ olan homojen bir maddesel cismin kütlesi cismin hacmi V olmak üzere $m=\rho V$ olarak tanımlanır.

⋆ Ornek 1. Homojen sabit $\rho=3\,\mathrm{gr/cm}$ yoğunluklu $15\,\mathrm{cm}\times 10\,\mathrm{cm}$ ebatındaki bir maddesel dikdörtgenin kütlesini bulalım.

⋆ $A=15\times 10=150\,\mathrm{cm}^2$ olduğundan $m=$

$$\rho A=3\times 150=450\,\mathrm{gr}$$

olur.✍

⋆ Ornek 2. Homojen sabit $\rho=2\,\mathrm{gr/cm}$ yoğunluklu $15\,\mathrm{cm}\times 10\,\mathrm{cm}\times 5\,\mathrm{cm}$ ebatındaki bir maddesel kübün kütlesini bulalım.

⋆ $V=15\times 10\times 5=750\,\mathrm{cm}^3$ olduğundan

$$m=\rho V=2\times 750=1500\,\mathrm{gr}$$

olur.✍

II. Fonksiyon grafikleri ile sınırlı sabit yoğunluklu maddesel düzlem levha parçasının kütlesi:

$[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli f ve g gibi iki fonksiyonun grafikleri tarafından sınırlanan sabit yoğunluklu homojen maddesel düzlem levha parçası C olsun. $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

ve $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ olsun. Bu durumda levhanın $x = x_{i-1}$ ve $x = x_i$ doğruları arasında kalan parçasının alanı

$$A_i \cong \left| f(t_i) - g(t_i) \right| \Delta x_i$$

dir. Bu durumda levhanın $x = x_{i-1}$ ve $x = x_i$ doğruları arasında kalan parçasının kütlesi $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere

$$m_i \cong \rho A_i = \rho \left| f(t_i) - g(t_i) \right| \Delta x_i$$

olur. Böylece C nin toplam m kütlesi

$$m \cong \sum_{i=1}^{n} m_i \cong \sum_{i=1}^{n} \rho \left| f(t_i) - g(t_i) \right| \Delta x_i = \rho \sum_{i=1}^{n} \left| f(t_i) - g(t_i) \right| \Delta x_i$$

olur. Bu durumda f ve g integrallenebilir olduğundan

$$m = \lim_{\|P\| \to 0} \left(\rho \sum_{i=1}^{n} \left| f(t_i) - g(t_i) \right| \Delta x_i \right) = \rho \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$$

İki Boyutlu Kütle
Örnek

olur. Şekil ?? ya bakınız. Yoğunluğu sabit olan bir düzlemsel cismin kütlesi

$$m = \text{Alan} \times \text{Yoğunluğu}$$

olur. Yoğunluk verilmemişse $\rho = 1$ olarak alınır.

⋆ Not: $x_1 = f(y)$ ve $x_2 = g(y)$ $(y \in [c,d])$ şeklinde verilmişse

$$m = \rho \int_c^d |x_1 - x_2| \, dy = \rho \int_c^d |f(y) - g(y)| \, dy$$

olur. Şekil ?? ya bakınız.

III. Fonksiyon grafikleri ile sınırlı değişken yoğunluklu maddesel düzlem levha parçasının kütlesi:

$[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli f ve g gibi iki fonksiyonun grafikleri tarafından sınırlanan değişken yoğunluklu maddesel düzlem levha parçası C olsun. Levhanın yoğunluğu x in sürekli bir $\rho(x)$ fonksiyonu olsun. $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

ve $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ olsun. Levhanın $x = x_{i-1}$ ve $x = x_i$ doğruları arasında kalan parçasının alanı

$$A_i \cong \left|f(t_i) - g(t_i)\right| \Delta x_i$$

dir. Bu durumda levhanın $x = x_{i-1}$ ve $x = x_i$ doğruları arasında kalan parçasının yoğunluğu $\rho(t_i)$ $(t_i \in [x_{i-1}, x_i])$ olmak üzere levhanın $x = x_{i-1}$ ve $x = x_i$ doğruları arasında kalan parçasının kütlesi

$$m_i \cong \rho(t_i) A_i = \rho(t_i)\left|f(t_i) - g(t_i)\right| \Delta x_i$$

olur.

Bu durumda levhanın toplam kütlesi yaklaşık olarak

$$m \cong \sum_{i=1}^{n} m_i \cong \sum_{i=1}^{n} \rho(t_i) A_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(t_i)\left|f(t_i) - g(t_i)\right| \Delta x_i$$

olur. Böylece levhanın kütlesi

$$m = \lim_{\|P\| \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} \rho(t_i)\left|f(t_i) - g(t_i)\right| \Delta x_i \right) = \int_a^b \rho(x)\left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}\,x$$

olur. Şekil ?? ye bakınız.

İki Boyutlu Kütle
Örnek

⋆ Not 1: Her x için $g(x)=0$ ise $m=\int_a^b \rho(x)\left|f(x)\right| \mathrm{d}x$ değeri x-ekseni f nin grafiği ve $x=a$, $x=b$ doğruları ile sınırlı düzlem levhanın kütlesi olur.

⋆ Not 2: $x_1=f(y)$ ve $x_2=g(y)$ $(y\in[c,d])$ şeklinde verilmişse

$$m=\int_c^d \rho(y)|x_1-x_2|\,\mathrm{d}y=\int_c^d \rho(y)\left|f(y)-g(y)\right|\mathrm{d}y$$

olur. Şekil ?? ye bakınız.

Örnek

⋆ Yarı çapı r olan ve bir (x,y) noktasındaki yoğunluğu $|x|$ olan diskin kütlesini bulalım. Şekil ? ye bakınız.

⋆ Diski birbirlerine eşit dört parçaya ayıralım. Birinci parçanın kütlesini bulalım. Yarı çapı r olan bir disk $y^2+x^2=r^2$ formundadır. Bu durumda $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ ve $\rho(x)=|x|$ $(x\in[0,r])$ olur. Böylece

$$m_1=\int_a^b \rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

olur. Bu integralde $u=r^2-x^2$ değişken değişimi uygulanırsa $\mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x$ ve $x=0$ için $u=r^2$, $x=r$ için $u=0$ olur. Buna göre

$$m_1=\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{r^2}^0 \frac{-\sqrt{u}}{2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{r^2}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{r^2}=\frac{1}{3}r^3$$

olur. Bu durumda cismin toplam kütlesi $m=4m_1=\frac{4}{3}r^3$ olur.✍