STATİK MOMENT VE KÜTLE MERKEZİ

Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

http://www2.ogu.edu.tr/~mkocak/
Sunum Tarihi: Nisan 17, 2008

Kütle Merkezi

Bir Boyutlu Kütlenin Statik Momenti ve Kütle Merkezi

I. Maddesel noktaların oluşturduğu sistemin statik momenti ve kütle merkezi:

Şekil ? de görüldüğü gibi bir ince çelik metal üzerine 0 noktasına uzaklıkları x_i ve kütleleri m_i olan n tane maddesel nokta yerleştirelim. Bu durumda bu sistemin toplam kütlesi $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$ olur. Her bir kütle çelik çubuğu aşağı doğru iter. Her bir i için $x_i m_i$ değerine 0 noktasına göre m_i kütlesinin **momenti veya statik momenti** bazen de **birinci momenti** denir. $\sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ değerine sistemin (m nin) 0 noktasına göre **momenti veya statik momenti** bazen de **birinci momenti** denir. Böylece sistemin herhangi bir $\overline{x}$ noktasına göre statik momenti $\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)m_i$ olur. Bu durumda $\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)m_i=0$ ise çelik çubuk dengede olur. O halde kütlenin merkezi $\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)m_i=0$ özelliğini sağlayan $\overline{x}$ noktasıdır. Bu nokta şu şekilde bulunur. $\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)m_i=0$ ise

$$0=\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)m_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{x}m_i-\sum_{i=1}^{n}x_im_i=\overline{x}\sum_{i=1}^{n}m_i-\sum_{i=1}^{n}x_im_i$$

olur. Böylece

$$\overline{x}\sum_{i=1}^{n}m_i-\sum_{i=1}^{n}x_im_i=0$$

yani

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_im_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_im_i}{m}$$

olur. Şekil ? ye bakınız.

II. Değişken yoğunluklu maddesel çubuğun statik momenti ve kütle merkezi:

Şimdi değişken yoğunluklu bir boyutlu l uzunluğunda bir maddesel çubuğun (örneğin ince bir telin) statik momentini ve kütle merkezini bulalım. Şekil ? de görüldüğü gibi reel eksen üzerine yerleştirelim. Maddesel çubuğun yoğunluğu x in sürekli bir $\rho:[0,l]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu olarak verilsin. $[0,l]$ aralığının bir bölüntüsü

$$P=\{0=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{n-1},x_n=l\}$$

ve $\triangle x_i=x_i-x_{i-1}$ olsun. Bu durumda maddesel çubuğun $[x_{i-1},x_i]$ aralığındaki kütlesi yaklaşık olarak $\rho(t_i)\Delta x_i$ olur. Bu durumda maddesel çubuğun $[x_{i-1},x_i]$ arasındaki parçasının $\overline{x}$ noktasına göre statik momenti $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ olmak üzere

$$\rho(t_i)(\overline{x}-t_i)\Delta x_i$$

olur. Bu durumda maddesel çubuğun $\overline{x}$ noktasına göre statik momenti yaklaşık olarak

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(t_i)(\overline{x}-t_i)\Delta x_i$$

olur. Böylece maddesel çubuğun dengede olması için

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(t_i)(\overline{x}-t_i)\Delta x_i=0$$

olmalıdır.

Bu durumda

$$0=\sum_{i=1}^{n}\rho(t_i)(\overline{x}-t_i)\Delta x_i=\overline{x}\sum_{i=1}^{n}\rho(t_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}\rho(t_i)t_i\Delta x_i$$

ve dolayısıyla

$$\overline{x}\sum_{i=1}^{n}\rho(t_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\rho(t_i)t_i\Delta x_i$$

olur. O halde

$$\overline{x}\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(t_i)\Delta x_i=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(t_i)t_i\Delta x_i$$

yani

$$\overline{x}\int_0^l \rho(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^l x\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

olur. Buradan

$$\overline{x}=\frac{\int_0^l x\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^l \rho(x)\,\mathrm{d}x}$$

elde edilir.

Buna göre çubuğun 0 noktasına göre statik momenti

$$S_0 = \int_0^l x\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

olur. Böylece çubuğun kütlesi

$$m = \int_0^l \rho(x)\,\mathrm{d}x$$

olmak üzere kütle merkezi

$$\overline{x} = \frac{\int_0^l \rho(x)x\,\mathrm{d}x}{\int_0^l \rho(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{S_0}{m}$$

olur. Buradan $S_0 = m\overline{x}$ olur.

Örnek 1.

Şekil ? deki maddesel noktaların kütleleri sırasıyla $5, 8, 6, 12, 4, 2, 6, 3, 10$ olduğuna göre bu dokuz maddesel noktanın oluşturduğu sistemin kütle merkezini bulalım.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{9} m_i} = \frac{2\times5+3\times8+5\times6+6\times12+8\times4+9\times2+11\times6+13\times3+14\times10}{5+8+6+12+4+2+6+3+10} = \frac{431}{56} = 7.6964$$

olur.✍

Örnek 2.

Uzunluğu 2 metre ve yoğunluğu $p(x) = \dfrac{x^3}{4}$ fonksiyonu ile verilen çubuğun kütle merkezini bulalım.

$$m = \int_0^2 \frac{x^3}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^3\,dx = \frac{1}{4}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 1$$

ve

$$S_0 = \int_0^2 \frac{x^3}{4}x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^4\,dx = \frac{1}{4}\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{8}{5}$$

dir. Bu durumda $S_0 = m\overline{x}$ olduğundan $\overline{x} = \frac{8}{5}$ metre olur. Şekil ? ye bakınız.✍

İki Boyutlu Kütlenin Statik Momenti ve Kütle Merkezi

I. Maddesel noktaların oluşturduğu sistemin statik momenti ve kütle merkezi:

Düzlemde (x_i, y_i) noktalarına yerleştirilmiş kütleleri m_i olan n tane maddesel noktaların oluşturduğu sistemi düşünelim. Bu sistemin toplam kütlesi

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

dir. Bu durumda bu sistemin x-eksenine ve y-eksenine göre olmak üzere iki statik momenti vardır. Sistemin x-eksenine göre statik momenti $S_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i$ ve y-eksenine göre statik momenti $S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ dir. Dolayısıyla sistemin dengede olması için her iki statik moment de 0 olmalıdır. Sistemin $x = \overline{x}$ doğrusuna göre statik momenti

$$S_{\overline{x}} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{x} - y_i)\, m_i$$

ve sistemin $y=\overline{y}$ doğrusuna göre momenti

$$S_{\overline{y}}=\sum_{i=1}^{n}(\overline{y}-x_i)\,m_i$$

dir. Bu durumda

$$S_{\overline{x}}=\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-y_i)\,m_i=0$$

ise $S_x=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i m_i$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\overline{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}=\frac{S_x}{m}$$

ve

$$S_{\overline{y}}=\sum_{i=1}^{n}(\overline{y}-x_i)\,m_i=0$$

ise $S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{S_y}{m}$$

olur. Bu durumda $x = \overline{x}$ ve $y = \overline{y}$ doğrularının arakesit noktası olan $G = (\overline{x}, \overline{y})$ noktası sistemin kütle merkezidir. Şekil ? ye bakınız.

II. Fonksiyon grafikleri ile sınırlı sabit yoğunluklu maddesel düzlem levha parçasının statik momenti ve kütle merkezi:

$[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli f ve g gibi iki fonksiyonun grafikleri tarafından sınırlanan sabit yoğunluklu homojen maddesel düzlem levha parçası C olsun. Her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq g(x) \geq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bu levha parçasının x-eksenine ve y-eksenine göre olmak üzere iki statik momenti vardır. Dolayısıyla sistemin dengede olması için her iki moment de 0 olmalıdır. $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\},$$

ve $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ olsun. Bu durumda levhanın $x = x_{i-1}$ ve $x = x_i$ aralığındaki parçasının $x = \overline{x}$ doğrusuna göre statik momenti yaklaşık olarak $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere $\rho\,(\overline{x} - t_i)\left|f(t_i) - g(t_i)\right|\Delta x$ olur. Şekil ? ye bakınız. Böylece $x = \overline{x}$ doğrusuna göre levhanın statik momenti

$$S_{\overline{x}} = \sum_{i=1}^{n} \rho\,(\overline{x} - t_i)\left|f(t_i) - g(t_i)\right|\Delta x_i$$

olur. Böylece

$$S_{\overline{x}} = \sum_{i=1}^{n} \rho\,(\overline{x} - t_i)\left|f(t_i) - g(t_i)\right|\Delta x_i = 0$$

ise

$$\sum_{i=1}^{n} \rho\,\overline{x}\left|f(t_i) - g(t_i)\right|\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \rho\,t_i\left|f(t_i) - g(t_i)\right|\Delta x_i$$

yani

$$\overline{x}\sum_{i=1}^{n} \rho\left|f(t_i) - g(t_i)\right|\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \rho\,t_i\left|f(t_i) - g(t_i)\right|\Delta x_i$$

olur. Bu durumda

$$\overline{x}\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho\left|f(t_i) - g(t_i)\right|\Delta x_i = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho\,t_i\left|f(t_i) - g(t_i)\right|\Delta x_i$$

ve dolayısıyla

$$\overline{x}\int_a^b \rho\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^b \rho x\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$$

olur. Böylece $\overline{x}=0$ alınırsa $S_y=\int_a^b \rho x\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$ olacağından $m=\int_a^b \rho\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$ olduğuda göz önüne alınırsa

$$\overline{x}=\frac{\int_a^b \rho x\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x}=\frac{S_y}{m}$$

olur. Bu durumda $S_y=\overline{x}m$ olur.

Şimdi levhanın $y=\overline{y}$ doğrusuna göre statik momentini bulalım. Levhanın $x=x_{i-1}$ ve $x=x_i$ doğruları arasında kalan parçasının $\overline{y}$ doğrusuna göre statik momenti, $\frac{f(t_i)+g(t_i)}{2}$ değeri $f(t_i)$, $g(t_i)$ noktalarının orta noktası olduğundan yaklaşık olarak

$$\rho\left(\overline{y}-\frac{f(t_i)+g(t_i)}{2}\right)\left(f(t_i)-g(t_i)\right)\Delta x_i$$

olur. Şekil ?? ye bakınız.

Böylece $y=\overline{y}$ doğrusuna göre statik moment

$$S_{\overline{y}}=\sum_{i=1}^{n}\rho\left(\overline{y}-\frac{f(t_i)+g(t_i)}{2}\right)(f(t_i)-g(t_i))\,\Delta x_i$$

olur. Böylece

$$S_{\overline{y}}=\sum_{i=1}^{n}\rho\left(\overline{y}-\frac{f(t_i)+g(t_i)}{2}\right)(f(t_i)-g(t_i))\,\Delta x_i=0$$

ise

$$\sum_{i=1}^{n}\rho\overline{y}\,(f(t_i)-g(t_i))\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\rho\,\frac{f(t_i)+g(t_i)}{2}\,(f(t_i)-g(t_i))\,\Delta x_i$$

yani

$$\overline{y}\sum_{i=1}^{n}\rho\,(f(t_i)-g(t_i))\,\Delta x_i=\frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{n}\left([f(t_i)]^2-[g(t_i)]^2\right)\Delta x_i$$

olur. Bu durumda

$$\overline{y}\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho\,(f(t_i)-g(t_i))\,\Delta x_i=\frac{\rho}{2}\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left([f(t_i)]^2-[g(t_i)]^2\right)\Delta x_i$$

ve dolayısıyla

$$\overline{y}\int_a^b\rho\,(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=\frac{\rho}{2}\int_a^b\left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)\mathrm{d}x$$

olur. Böylece $\overline{y}=0$ ise

II. Fonksiyon grafikleri ile sınırlı sabit yoğunluklu maddesel düzlem levha parçasının statik momenti ve kütle merkezi:

$S_x = \frac{\rho}{2}\int\limits_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) \mathrm{d}x$ olacağından $m = \rho \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x$ olduğuda göz önüne alınırsa

$$\overline{y} = \frac{\frac{\rho}{2}\int\limits_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) \mathrm{d}x}{\rho \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x} = \frac{S_x}{m}$$

olur. Bu durumda $S_x = \overline{y}m$ olur. Böylece kütle merkezi $x = \overline{x}$ ve $y = \overline{y}$ doğrularının arakesit noktası olan $G = (\overline{x}, \overline{y})$ noktasıdır.

Örnek

Analitik düzlemde $(3,2)$, $(2,-1)$, $(-4,3)$, $(1,4)$, $(5,-3)$ noktalarına dağılmış ve kütleleri sırasıyla 5, 4, 8, 6, 2 olan 5 tane maddesel noktanın oluşturduğu sistemin koordinat eksenlerine göre statik momentlerini ve kütle merkezini bulalım. Şekil ?? ye bakınız.

- ⋆ Sistemin toplam kütlesi $m = \sum_{i=1}^{5} m_i = 25$ dir.

$$\begin{aligned} S_x &= \sum_{i=1}^{5} y_i m_i = 2\times 5 + (-1)\times 4 + 3\times 8 + 4\times 6 + (-3)\times 2 = 210 = 48 \\ S_y &= \sum_{i=1}^{5} x_i m_i = 3\times 5 + 2\times 4 + (-4)\times 8 + 1\times 6 + 5\times 2 = 245 = 7 \end{aligned}$$

ve

$$\overline{x} = \frac{S_y}{m} = \frac{7}{25}, \ \overline{y} = \frac{S_x}{m} = \frac{48}{25}$$

olur. Yani sistemin kütle merkezi $G = (\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{7}{25}, \frac{48}{25}\right)$ dir.✍

Not

- ⋆ Levhanın yoğunluğu verilmemişse $\rho = 1$ alınır.
- ⋆ Yandaki Şekil ? deki gibi bir levha için

$$S_x = \rho \int_c^d y(f(y) - g(y))\,\mathrm{d}y \text{ ve } S_y = \frac{\rho}{2} \int_c^d ([f(y)]^2 - [g(y)]^2)\,\mathrm{d}y$$

ile hesaplanır. Bu durumda her $y \in [c, d]$ için $g(y) = 0$ ise

$$S_x = \rho \int_c^d y f(y)\,\mathrm{d}y \text{ ve } S_y = \frac{\rho}{2} \int_c^d (f(y))^2\,\mathrm{d}y$$

olur.

Örnek

$y^2 = x + 9$ parabolü, x-ekseni ve y-ekseni ile sınırlı homojen düzlem levhasının ikinci bölgede kalan parçasının statik momentlerini bulalım. Şekil ? ye bakınız.

$\star$ $x = y^2 - 9$ ve $y \in [0,3]$ için $x \leq 0$ dır. Bu durumda

$$S_x = \int_0^3 y(-x)\,\mathrm{d}y = -\int_0^3 y\left(y^2-9\right)\mathrm{d}y = -\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) = \frac{81}{4}$$

ve

$$S_y = \frac{1}{2}\int_0^3 x(-x)\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\int_0^3 \left(y^2-9\right)^2\mathrm{d}y = -\frac{324}{5}$$

olur.✍

Örnek

$y=4-x^2$ parabolü, x-ekseni ve y-ekseni ile sınırlı homojen düzlem levhasının birinci bölgede kalan kısmının statik momentlerini ve kütle merkezini bulalım. Şekil ? ye bakınız.

★ Burada $x=\sqrt{4-y}$ olur.

$$S_x=\int_0^4 yx\,\mathrm{d}y=\int_0^4 y\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y=\frac{128}{15}$$

ve

$$S_y=\frac{1}{2}\int_0^4 xx\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^3(4-y)\,\mathrm{d}y=4$$

olur. Diğer yandan

$$m=\int_0^2\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$$

olur. Bu durumda $\overline{x}=\frac{S_y}{m}=\frac{3}{4}$ ve $\overline{y}=\frac{S_x}{m}=\frac{8}{5}$ olur.✍