



## STATİK MOMENT VE KÜTLE MERKEZİ

**Kütle Merkezi**

**Örnek 1.**

**Örnek 2.**

**İki Boyutlu ...**

**I. Maddesel ...**

**II. Fonksiyon ...**

**Örnek**

**Not**

**Örnek**





# Kütle Merkezi

## Bir Boyutlu Kütlelerin Statik Momenti ve Kütle Merkezi

### I. Maddesel noktaların oluşturduğu sistemin statik momenti ve kütle merkezi:

**Şekil 1** de görüldüğü gibi bir ince çelik metal üzerine 0 noktasına uzaklıkları  $x_i$  ve kütleleri  $m_i$  olan  $n$  tane maddesel nokta yerleştirelim. Bu durumda bu sistemin toplam kütlesi  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  olur. Her bir kütle çelik çubuğu aşağı doğru iter. Her bir  $i$  için  $x_i m_i$  değerine 0 noktasına göre  $m_i$  kütlelerinin **momenti veya statik momenti** bazen de **birinci momenti** denir.  $\sum_{i=1}^n x_i m_i$  değerine sistemin ( $m$  nin ) 0 noktasına göre **momenti veya statik momenti** bazen de **birinci momenti** denir. Böylece sistemin herhangi bir  $\bar{x}$  noktasına göre statik momenti  $\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i) m_i$  olur. Bu durumda  $\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i) m_i = 0$  ise çelik çubuk dengede olur. O halde kütlelerin merkezi  $\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i) m_i = 0$  özelliğini sağlayan  $\bar{x}$  noktasıdır. Bu nokta şu şekilde bulunur.  $\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i) m_i = 0$  ise

### Kütle Merkezi

Örnek 1.

Örnek 2.

İki Boyutlu ...

I. Maddesel ...

II. Fonksiyon ...

Örnek

Not

Örnek





$$0 = \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i) m_i = \sum_{i=1}^n \bar{x} m_i - \sum_{i=1}^n x_i m_i = \bar{x} \sum_{i=1}^n m_i - \sum_{i=1}^n x_i m_i$$

olur. Böylece

$$\bar{x} \sum_{i=1}^n m_i - \sum_{i=1}^n x_i m_i = 0$$

yani

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{m}$$

olur. Şekil  ye bakınız.

### Kütle Merkezi

Örnek 1.

Örnek 2.

İki Boyutlu ...

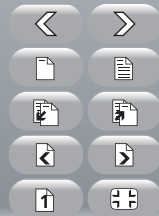
I. Maddesel ...

II. Fonksiyon ...

Örnek

Not

Örnek





## II. Değişken yoğunluklu maddesel çubuğun statik momenti ve kütle merkezi:

Şimdi değişken yoğunluklu bir boyutlu  $l$  uzunluğunda bir maddesel çubuğun (örneğin ince bir telin) statik momentini ve kütle merkezini bulalım. Şekil  $\textcircled{P}$  de görüldüğü gibi reel eksen üzerine yerleştirelim. Maddesel çubuğun yoğunluğu  $x$  in sürekli bir  $\rho : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu olarak verilsin.  $[0, l]$  aralığının bir bölüntüsü

$$P = \{0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n = l\}$$

ve  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  olsun. Bu durumda maddesel çubuğun  $[x_{i-1}, x_i]$  aralığındaki kütlesi yaklaşık olarak  $\rho(t_i)\Delta x_i$  olur. Bu durumda maddesel çubuğun  $[x_{i-1}, x_i]$  arasındaki parçasının  $\bar{x}$  noktasına göre statik momenti  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  olmak üzere

$$\rho(t_i)(\bar{x} - t_i)\Delta x_i$$

olur. Bu durumda maddesel çubuğun  $\bar{x}$  noktasına göre statik momenti yaklaşık olarak

$$\sum_{i=1}^n \rho(t_i)(\bar{x} - t_i)\Delta x_i$$

olur. Böylece maddesel çubuğun dengede olması için

$$\sum_{i=1}^n \rho(t_i)(\bar{x} - t_i)\Delta x_i = 0$$

olmalıdır.

### Kütle Merkezi

Örnek 1.

Örnek 2.

İki Boyutlu ...

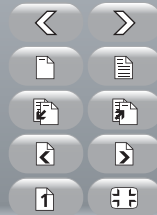
I. Maddesel ...

II. Fonksiyon ...

Örnek

Not

Örnek



Bu durumda

$$0 = \sum_{i=1}^n \rho(t_i)(\bar{x} - t_i)\Delta x_i = \bar{x} \sum_{i=1}^n \rho(t_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^n \rho(t_i)t_i\Delta x_i$$

ve dolayısıyla

$$\bar{x} \sum_{i=1}^n \rho(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \rho(t_i)t_i\Delta x_i$$

olur. O halde

$$\bar{x} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(t_i)\Delta x_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(t_i)t_i\Delta x_i$$

yani

$$\bar{x} \int_0^l \rho(x) dx = \int_0^l x\rho(x) dx$$

olur. Buradan

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l x\rho(x) dx}{\int_0^l \rho(x) dx}$$

elde edilir.



### Kütle Merkezi

Örnek 1.

Örnek 2.

İki Boyutlu ...

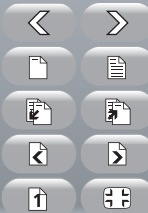
I. Maddesel ...

II. Fonksiyon ...

Örnek

Not

Örnek





Buna göre çubuğun 0 noktasına göre statik momenti

$$S_0 = \int_0^l x \rho(x) dx$$

olur. Böylece çubuğun kütlesi

$$m = \int_0^l \rho(x) dx$$

olmak üzere kütle merkezi

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l \rho(x)x dx}{\int_0^l \rho(x) dx} = \frac{S_0}{m}$$

olur. Buradan  $S_0 = m\bar{x}$  olur.

### Kütle Merkezi

Örnek 1.

Örnek 2.

İki Boyutlu ...

I. Maddesel ...

II. Fonksiyon ...

Örnek

Not

Örnek





## Örnek 1.

Şekil 7.1 deki maddesel noktaların kütleleri sırasıyla 5,8,6,12,4,2,6,3,10 olduğuna göre bu dokuz maddesel noktanın oluşturduğu sistemin kütle merkezini bulalım.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i m_i}{\sum_{i=1}^9 m_i} = \frac{2 \times 5 + 3 \times 8 + 5 \times 6 + 6 \times 12 + 8 \times 4 + 9 \times 2 + 11 \times 6 + 13 \times 3 + 14 \times 10}{5 + 8 + 6 + 12 + 4 + 2 + 6 + 3 + 10} = \frac{431}{56} = 7.6964$$

olur. 

## Örnek 2.

Uzunluğu 2 metre ve yoğunluğu  $p(x) = \frac{x^3}{4}$  fonksiyonu ile verilen çubuğun kütle merkezini bulalım.

Kütle Merkezi

Örnek 1.

Örnek 2.

İki Boyutlu ...

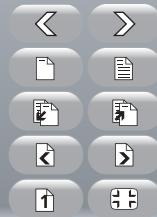
I. Maddesel ...

II. Fonksiyon ...

Örnek

Not

Örnek






$$m = \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 1$$

ve

$$S_0 = \int_0^2 \frac{x^3}{4} x dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x^4 dx = \frac{1}{4} \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{8}{5}$$

dir. Bu durumda  $S_0 = m\bar{x}$  olduğundan  $\bar{x} = \frac{8}{5}$  metre olur. **Şekil ?** ye bakınız. 

Kütle Merkezi

Örnek 1.

Örnek 2.

İki Boyutlu ...

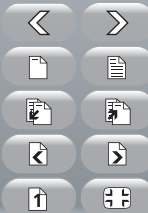
I. Maddesel ...

II. Fonksiyon ...

Örnek

Not

Örnek







# İki Boyutlu Kütlenin Statik Momenti ve Kütle Merkezi

## I. Maddesel noktaların oluşturduğu sistemin statik momenti ve kütle merkezi:

Düzlemde  $(x_i, y_i)$  noktalarına yerleştirilmiş kütleleri  $m_i$  olan  $n$  tane maddesel noktaların oluşturduğu sistemi düşünelim. Bu sistemin toplam kütlesi

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

dir. Bu durumda bu sistemin  $x$ -eksenine ve  $y$ -eksenine göre olmak üzere iki statik momenti vardır. Sistemin  $x$ -eksenine göre statik momenti  $S_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i$  ve  $y$ -eksenine göre statik momenti  $S_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i$  dir. Dolayısıyla sistemin dengede olması için her iki statik moment de 0 olmalıdır. Sistemin  $x = \bar{x}$  doğrusuna göre statik momenti

$$S_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^n (\bar{x} - y_i) m_i$$

**Kütle Merkezi**

**Örnek 1.**

**Örnek 2.**

**İki Boyutlu ...**

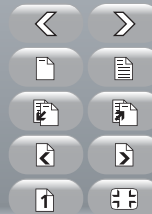
**I. Maddesel ...**

**II. Fonksiyon ...**

**Örnek**

**Not**

**Örnek**



I. Maddesel noktaların oluşturduğu sistemin statik momenti ve kütle merkezi:

10/19



ve sistemin  $y = \bar{y}$  doğrusuna göre momenti

$$S_{\bar{y}} = \sum_{i=1}^n (\bar{y} - x_i) m_i$$

dir. Bu durumda

$$S_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^n (\bar{x} - y_i) m_i = 0$$

ise  $S_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i$  olduğu göz önüne alınırsa

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{S_x}{m}$$

ve

$$S_{\bar{y}} = \sum_{i=1}^n (\bar{y} - x_i) m_i = 0$$

**Kütle Merkezi**

**Örnek 1.**

**Örnek 2.**

**İki Boyutlu ...**

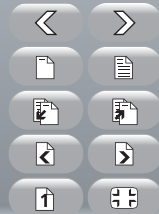
**I. Maddesel ...**

**II. Fonksiyon ...**

**Örnek**

**Not**

**Örnek**





ise  $S_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i$  olduğu göz önüne alınırsa

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{S_y}{m}$$

olur. Bu durumda  $x = \bar{x}$  ve  $y = \bar{y}$  doğrularının arakesit noktası olan  $G = (\bar{x}, \bar{y})$  noktası sistemin kütle merkezidir. **Şekil** ? ye bakınız.

## II. Fonksiyon grafikleri ile sınırlı sabit yoğunluklu maddesel düzlem levha parçasının statik momenti ve kütle merkezi:

$[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı sürekli  $f$  ve  $g$  gibi iki fonksiyonun grafikleri tarafından sınırlanan sabit yoğunluklu homojen maddesel düzlem levha parçası  $C$  olsun. Her  $x \in [a, b]$  için  $f(x) \geq g(x) \geq 0$  olduğunu varsayalım. Bu durumda bu levha parçasının  $x$ -eksenine ve  $y$ -eksenine göre olmak üzere iki statik momenti vardır. Dolayısıyla sistemin dengede olması için her iki moment de 0 olmalıdır.  $[a, b]$  aralığının bir bölüntüsü

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n = b\},$$

**Kütle Merkezi**

**Örnek 1.**

**Örnek 2.**

**İki Boyutlu ...**

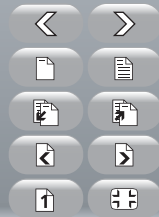
**I. Maddesel ...**

**II. Fonksiyon ...**

**Örnek**

**Not**

**Örnek**



ve  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  olsun. Bu durumda levhanın  $x = x_{i-1}$  ve  $x = x_i$  aralığındaki parçasının  $x = \bar{x}$  doğrusuna göre statik momenti yaklaşık olarak  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  olmak üzere  $\rho(\bar{x} - t_i) |f(t_i) - g(t_i)| \Delta x$  olur. **Şekil 9** ye bakınız. Böylece  $x = \bar{x}$  doğrusuna göre levhanın statik momenti

$$S_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^n \rho(\bar{x} - t_i) |f(t_i) - g(t_i)| \Delta x_i$$

olur. Böylece

$$S_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^n \rho(\bar{x} - t_i) |f(t_i) - g(t_i)| \Delta x_i = 0$$

ise

$$\sum_{i=1}^n \rho \bar{x} |f(t_i) - g(t_i)| \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \rho t_i |f(t_i) - g(t_i)| \Delta x_i$$

yani

$$\bar{x} \sum_{i=1}^n \rho |f(t_i) - g(t_i)| \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \rho t_i |f(t_i) - g(t_i)| \Delta x_i$$

olur. Bu durumda

$$\bar{x} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho |f(t_i) - g(t_i)| \Delta x_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho t_i |f(t_i) - g(t_i)| \Delta x_i$$

ve dolayısıyla



**Kütle Merkezi**

**Örnek 1.**

**Örnek 2.**

**İki Boyutlu ...**

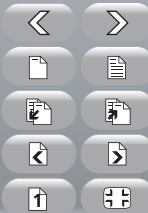
**I. Maddesel ...**

**II. Fonksiyon ...**

**Örnek**

**Not**

**Örnek**





$$\bar{x} \int_a^b \rho |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b \rho x |f(x) - g(x)| dx$$

olur. Böylece  $\bar{x} = 0$  alınırsa  $S_y = \int_a^b \rho x |f(x) - g(x)| dx$  olacağından  $m = \int_a^b \rho |f(x) - g(x)| dx$  olduğunda göz önüne alınırsa

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b \rho x |f(x) - g(x)| dx}{\int_a^b \rho |f(x) - g(x)| dx} = \frac{S_y}{m}$$

olur. Bu durumda  $S_y = \bar{x}m$  olur.

Şimdi levhanın  $y = \bar{y}$  doğrusuna göre statik momentini bulalım. Levhanın  $x = x_{i-1}$  ve  $x = x_i$  doğruları arasında kalan parçasının  $\bar{y}$  doğrusuna göre statik momenti,  $\frac{f(t_i) + g(t_i)}{2}$  değeri  $f(t_i)$ ,  $g(t_i)$  noktalarının orta noktası olduğundan yaklaşık olarak

$$\rho \left( \bar{y} - \frac{f(t_i) + g(t_i)}{2} \right) (f(t_i) - g(t_i)) \Delta x_i$$

olur. [Şekil ?](#) ye bakınız.

**Kütle Merkezi**

**Örnek 1.**

**Örnek 2.**

**İki Boyutlu ...**

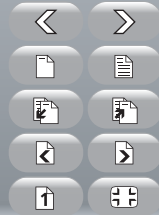
**I. Maddesel ...**

**II. Fonksiyon ...**

**Örnek**

**Not**

**Örnek**





Böylece  $y = \bar{y}$  doğrusuna göre statik moment

$$S_{\bar{y}} = \sum_{i=1}^n \rho \left( \bar{y} - \frac{f(t_i) + g(t_i)}{2} \right) (f(t_i) - g(t_i)) \Delta x_i$$

olur. Böylece

$$S_{\bar{y}} = \sum_{i=1}^n \rho \left( \bar{y} - \frac{f(t_i) + g(t_i)}{2} \right) (f(t_i) - g(t_i)) \Delta x_i = 0$$

ise

$$\sum_{i=1}^n \rho \bar{y} (f(t_i) - g(t_i)) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \rho \frac{f(t_i) + g(t_i)}{2} (f(t_i) - g(t_i)) \Delta x_i$$

yani

$$\bar{y} \sum_{i=1}^n \rho (f(t_i) - g(t_i)) \Delta x_i = \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^n ([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2) \Delta x_i$$

olur. Bu durumda

$$\bar{y} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho (f(t_i) - g(t_i)) \Delta x_i = \frac{\rho}{2} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n ([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2) \Delta x_i$$

ve dolayısıyla

$$\bar{y} \int_a^b \rho (f(x) - g(x)) dx = \frac{\rho}{2} \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

olur. Böylece  $\bar{y} = 0$  ise

**Kütle Merkezi**

**Örnek 1.**

**Örnek 2.**

**İki Boyutlu ...**

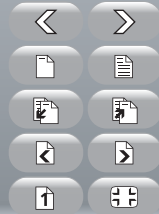
**I. Maddesel ...**

**II. Fonksiyon ...**

**Örnek**

**Not**

**Örnek**



II. Fonksiyon grafikleri ile sınırlı sabit yoğunluklu maddesel düzlem levha parçasının statik momenti ve kütle merkezi:

15/19



$$S_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx \text{ olacağından } m = \rho \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ olduğunda göz önüne alınırsa}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{\rho}{2} \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx}{\rho \int_a^b (f(x) - g(x)) dx} = \frac{S_x}{m}$$

olur. Bu durumda  $S_x = \bar{y}m$  olur. Böylece kütle merkezi  $x = \bar{x}$  ve  $y = \bar{y}$  doğrularının arakesit noktası olan  $G = (\bar{x}, \bar{y})$  noktasıdır.

**Kütle Merkezi**

**Örnek 1.**

**Örnek 2.**

**İki Boyutlu ...**

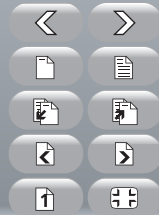
**I. Maddesel ...**

**II. Fonksiyon ...**

**Örnek**


**Not**

**Örnek**





## Örnek

Analitik düzlemde  $(3,2)$ ,  $(2,-1)$ ,  $(-4,3)$ ,  $(1,4)$ ,  $(5,-3)$  noktalarına dağılmış ve kütleleri sırasıyla 5, 4, 8, 6, 2 olan 5 tane maddesel noktanın oluşturduğu sistemin koordinat eksenlerine göre statik momentlerini ve kütle merkezini bulalım. **Şekil**  ye bakınız.

\* Sistemin toplam kütlesi  $m = \sum_{i=1}^5 m_i = 25$  dir.

$$S_x = \sum_{i=1}^5 y_i m_i = 2 \times 5 + (-1) \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 6 + (-3) \times 2 = 210 = 48$$

$$S_y = \sum_{i=1}^5 x_i m_i = 3 \times 5 + 2 \times 4 + (-4) \times 8 + 1 \times 6 + 5 \times 2 = 245 = 7$$

ve

$$\bar{x} = \frac{S_y}{m} = \frac{7}{25}, \quad \bar{y} = \frac{S_x}{m} = \frac{48}{25}$$

olur. Yani sistemin kütle merkezi  $G = (\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{7}{25}, \frac{48}{25} \right)$  dir. 

**Kütle Merkezi**

**Örnek 1.**

**Örnek 2.**

**İki Boyutlu ...**

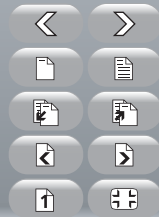
**I. Maddesel ...**

**II. Fonksiyon ...**

**Örnek**

**Not**

**Örnek**





## Not

★ Levhanın yoğunluğu verilmemişse  $\rho = 1$  alınır.

★ Yandaki Şekil ? deki gibi bir levha için

$$S_x = \rho \int_c^d y(f(y) - g(y)) dy \text{ ve } S_y = \frac{\rho}{2} \int_c^d ([f(y)]^2 - [g(y)]^2) dy$$

ile hesaplanır. Bu durumda her  $y \in [c, d]$  için  $g(y) = 0$  ise

$$S_x = \rho \int_c^d y f(y) dy \text{ ve } S_y = \frac{\rho}{2} \int_c^d (f(y))^2 dy$$

olur.

## Örnek

$y^2 = x + 9$  parabolü,  $x$ -ekseni ve  $y$ -ekseni ile sınırlı homojen düzlem levhasının ikinci bölgede kalan parçasının statik momentlerini bulalım. Şekil ? ye bakınız.



Kütle Merkezi

Örnek 1.

Örnek 2.

İki Boyutlu ...

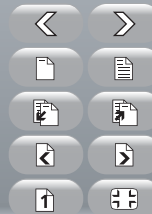
I. Maddesel ...

II. Fonksiyon ...

Örnek

Not

Örnek





☆  $x = y^2 - 9$  ve  $y \in [0, 3]$  için  $x \leq 0$  dir. Bu durumda

$$S_x = \int_0^3 y(-x) dy = - \int_0^3 y(y^2 - 9) dy = - \left( \frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) = \frac{81}{4}$$

ve

$$S_y = \frac{1}{2} \int_0^3 x(-x) dy = -\frac{1}{2} \int_0^3 x^2 dy = -\frac{1}{2} \int_0^3 (y^2 - 9)^2 dy = -\frac{324}{5}$$

olur. ↵

**Kütle Merkezi**

**Örnek 1.**

**Örnek 2.**

**İki Boyutlu ...**

**I. Maddesel ...**

**II. Fonksiyon ...**

**Örnek**

**Not**

**Örnek**



# Örnek

$y = 4 - x^2$  parabolü,  $x$ -ekseni ve  $y$ -ekseni ile sınırlı homojen düzlem levhasının birinci bölgede kalan kısmının statik momentlerini ve kütle merkezini bulalım. **Şekil** ?<sup>o</sup> ye bakınız.

★ Burada  $x = \sqrt{4 - y}$  olur.


$$S_x = \int_0^4 yx \, dy = \int_0^4 y\sqrt{4-y} \, dy = \frac{128}{15}$$

ve

$$S_y = \frac{1}{2} \int_0^4 xx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^3 (4-y) \, dy = 4$$

olur. Diğer yandan

$$m = \int_0^2 (4 - x^2) \, dx = \frac{16}{3}$$

olur. Bu durumda  $\bar{x} = \frac{S_y}{m} = \frac{3}{4}$  ve  $\bar{y} = \frac{S_x}{m} = \frac{8}{5}$  olur. 



İki Boyutlu ...

I. Maddesel ...

II. Fonksiyon ...

Örnek

Not

Örnek

Örnek

