



EYLEMSİZLİK MOMENTİ

Eylemsizlik ...

Örnek 1

Örnek 2

Örnek 3

Örnek 4





Eylemsizlik Momenti

Bir cism bir eksen etrafında dödürölmek istenirse cisim bir direnç ortaya koyar. Bu dirence **eylemsizlik momenti** (atalet momenti) veya **ikinci moment** denir. **Şekil 1** daki sistemin $x = a$ doğrusuna göre eylemsizlik momenti $r^2 m$ dir. **Şekil 2** deki sistemin $x = c$ doğrusuna göre eylemsizlik momenti

$$0^2 m + (2r)^2 m = 4r^2 m$$

dir. Daha genel olarak seçilen herhangi bir eksene göre bir sistemin eylemsizlik momenti r_i ler m_i cisimlerinin seçilen döndürme eksenine uzaklığı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 m_i$$

olur. Özel olarak n tane m_1, m_2, \dots, m_n maddesel noktalarının oluşturduğu sistemin analitik düzlemde koordinat eksenlerine göre eylemsizlik momentleri, maddesel noktaların yerleri sırasıyla

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

olmak üzere

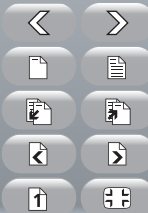
Eylemsizlik ...

Örnek 1

Örnek 2

Örnek 3

Örnek 4





$$I_x = \sum_{i=1}^n y_i^2 m_i \text{ ve } I_y = \sum_{i=1}^n x_i^2 m_i$$

ile hesaplanır. Bu sistemin başlangıç noktasına göre eylemsizlik momenti

$$I_0 = I_x + I_y = \sum_{i=1}^n (y_i^2 + x_i^2) m_i$$

olur. Bir cismin eylemsizlik momenti cismin seçilen eksene uzaklığına ve cismin kütlelerinin dağılımına bağlıdır. Burada genellikle sabit yoğunluklu homojen cisimlerin eylemsizlik momentleri ile ilgileneceğiz. Kütlelerin yoğunluğu verilmemişse yoğunluk 1 olarak alınır.

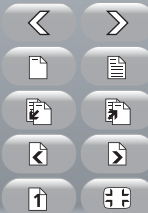
Eylemsizlik ...

Örnek 1

Örnek 2

Örnek 3

Örnek 4





Örnek 1

Kütlesi $m_1 = 5$, $m_2 = 8$, $m_3 = 6$, $m_4 = 10$, $m_5 = 3$ olan maddesel noktaların koordinatları sırasıyla $-2, 3, 4, 6, 10$ olduğuna göre bu sistemin başlangıç noktasına göre eylemsizlik momentini bulalım. Şekil ?

$$I_0 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 m_i = (-2)^2 \times 5 + 8 \times 3^2 + 6 \times 4^2 + 10 \times 6^2 + 3 \times 10^2 = 848$$

olur.

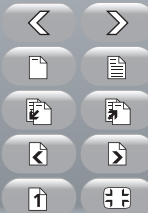
Eylemsizlik ...

Örnek 1

Örnek 2

Örnek 3

Örnek 4





Örnek 2

Analitik düzlemde $(3,2)$, $(2,-1)$, $(-4,3)$, $(1,4)$, $(5,-3)$ noktalarına dağılmış ve kütleleri sırasıyla 5, 4, 8, 6, 2 olan 5 tane maddesel noktanın oluşturduğu sistemin koordinat eksenlerine ve $x=4$, $y=-2$ doğrularına göre eylemsizlik momentlerini bulalım. Şekil 1

★ Sistemin toplam kütlesi $m = \sum_{i=1}^5 m_i = 25$ dir.

$$I_x = \sum_{i=1}^5 y_i^2 m_i = 2^2 \times 5 + (-1)^2 \times 4 + 3^2 \times 8 + 4^2 \times 6 + (-3)^2 \times 2 = 210 = 8.4m$$

$$I_y = \sum_{i=1}^5 x_i^2 m_i = 3^2 \times 5 + 2^2 \times 4 + (-4)^2 \times 8 + 1^2 \times 6 + 5^2 \times 2 = 245 = 9.8m$$

$$I_{d_1} = \sum_{i=1}^5 r_i^2 m_i = 1^2 \times 5 + 2^2 \times 4 + 8^2 \times 8 + 3^2 \times 6 + 1^2 \times 2 = 589 = 23.56m$$

$$I_{d_2} = \sum_{i=1}^5 r_i^2 m_i = 16 \times 5 + 1 \times 4 + 25 \times 8 + 36 \times 6 + 1 \times 2 = 502 = 20.8m$$

olur.

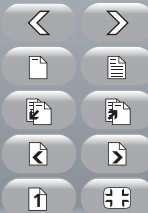
Eylemsizlik ...

Örnek 1

Örnek 2

Örnek 3

Örnek 4





Örnek 3

Taban uzunluğu a ve yüksekliği b olan dikdörtgensel homojen bir levhanın kenarlarından birine göre eylemsizlik momentini bulalım.

★ Levhayı **Şekil** de görüldüğü gibi dik koordinat düzlemine yerleştirelim.

★ $[0, a]$ aralığının bir bölüntüsü

$$P = \{0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n = a\} \text{ ve } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

olsun. i . aralığa karşılık gelen dilimin kütlesi $\Delta m_i = b \Delta x_i$ (ρ sabit olduğundan $\rho = 1$ alınmıştır) olur. Bu durumda Δx_i parçasının y -eksenine uzaklığı $r_i \cong x_i$ alınabilir. Bu durumda Δm_i nin y -eksenine göre eylemsizlik momenti yaklaşık olarak $\Delta m_i = x_i^2 b \Delta x_i$ olur. Bu durumda toplam eylemsizlik momenti yaklaşık olarak

$$I_y \cong \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta m_i = b \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x_i$$

olur. Böylece

$$I_y = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} b \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x_i = b \int_0^a x^2 dx = \frac{ba^3}{3}$$

olur. Toplam kütle $m = ab$ olduğundan

$$I_y = \frac{ba^3}{3} = \frac{1}{3} a^2 m$$

olur.

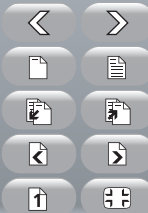
Eylemsizlik ...

Örnek 1

Örnek 2

Örnek 3

Örnek 4





★ Benzer şekilde

$$I_x \cong \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta m_i = a \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta y_i$$

olur. Böylece

$$I_x = \lim_{\Delta y_i \rightarrow 0} a \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta y_i = a \int_0^b y^2 dy = \frac{ab^3}{3}$$

olur. Toplam kütle $m = ab$ olduğundan

$$I_x = \frac{ab^3}{3} = \frac{1}{3} b^2 m$$

olur. Şekil ?

Eylemsizlik ...

Örnek 1

Örnek 2

Örnek 3

Örnek 4





Örnek 4

Uzunluğu b olan ρ yoğunluklu homojen bir halatın

(a). Sol uç noktasına göre, (b). Kütle merkezine göre, (c). Sağ uç noktasına göre eylemsizlik momentlerini bulalım. Şekil 2

★ (a). Halatı başlangıç noktasından itibaren x -eksenine yatıralım. $[0, b]$ aralığının bir bölüntüsü

$$P = \{0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n = b\} \text{ ve } m_i = m_i - m_{i-1}$$

olsun. i . alt aralığa karşılık gelen halatın kütlesi $\Delta m_i = \rho \Delta x_i$ olur. $r_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere kütlesi Δm_i olan halat parçasının 0 noktasına göre eylemsizlik momenti yaklaşık olarak $r_i^2 \Delta m_i = r_i^2 \rho \Delta x_i$ olur. Bu durumda toplam eylemsizlik momenti

$$I_0 \cong \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta m_i = \sum_{i=1}^n r_i^2 \rho \Delta x_i$$

olur. Böylece $I_0 = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n r_i^2 \rho \Delta x_i = \int_0^b \rho x^2 dx$ elde edilir. Halatı homojen yani yoğunluğu sabit alırsak

$$I_0 = \rho \int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3} \rho b^3$$

olur. Halatın kütlesi $m = \rho b$ olduğundan $I_0 = \frac{1}{3} m b^2$ olur.

Eylemsizlik ...

Örnek 1

Örnek 2

Örnek 3

Örnek 4





★ (b).

$$I_m = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dm = \rho \int_0^b x^2 dx = \rho \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{\rho}{3} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^3 - \left(-\frac{b}{2} \right)^3 \right) = \frac{\rho}{3} \left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right) = \frac{\rho b^3}{12}$$

ve halatın kütesinin $m = \rho b$ olduğu göz önüne alınırsa

$$I_m = \frac{\rho b^3}{12} = \frac{(\rho b)b^2}{12} = \frac{mb^2}{12}$$

olur.

★ (c). Paralel eksen kuralını kullanarak halatın sağ uç noktasına göre eylemsizlik momentini şu şekilde bulabiliriz. $d = \frac{b}{2}$, $M = \rho b$

ve $I_m = \frac{Mb^2}{12}$ olduğundan Paralel eksen teoremine göre

$$I_b = I_m + md^2 = \frac{mb^2}{12} + \rho b \left(\frac{b}{2} \right)^2 = m \frac{b^2}{12} + m \frac{b^2}{4} = m \left(\frac{b^2}{12} + \frac{b^2}{4} \right) = m \left(\frac{4b^2}{12} \right) = \frac{mb^2}{3}$$

olur.

Eylemsizlik ...

Örnek 1

Örnek 2

Örnek 3

Örnek 4

