

# EYLEMSİZLİK MOMENTİ

© 2008 mkocak@ogu.edu.tr
Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

http://www2.ogu.edu.tr/~mkocak/
Sunum Tarihi: Nisan 17, 2008

# Eylemsizlik Momenti

Bir cism bir eksen etrafında dödürülmek istenirse cisim bir direnç ortaya koyar. Bu dirence **eylemsizlik momenti (atalet momenti)** veya **ikinci moment** denir. Şekil ?? daki sistemin $x = a$ doğrusuna göre eylemsizlik momenti $r^2m$ dir. Şekil ?? deki sistemin $x = c$ doğrusuna göre eylemsizlik momenti

$$0^2m + (2r)^2m = 4r^2m$$

dir. Daha genel olarak seçilen herhagi bir eksene göre bir sistemin eylemsizlik momenti $r_i$ ler $m_i$ cisimlerinin seçilen döndürme eksenine uzaklığı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i$$

olur. Özel olarak $n$ tane $m_1$, $m_2, \cdots, m_n$ maddesel noktalarının oluşturduğu sistemin analitik düzlemde koordinat eksenlerine göre eylemsizlik momentleri, maddesel noktaların yerleri sırasıyla

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

olmak üzere

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i \text{ ve } I_y = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i$$

ile hesaplanır. Bu sistemin başlangıç noktasına göre eylemsizlik momenti

$$I_0 = I_x + I_y = \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + x_i^2) m_i$$

olur. Bir cismin eylemsizlik momenti cismin seçilen eksene uzaklığına ve cismin kütlesinin dağılımına bağlıdır. Burada genellikle sabit yoğunluklu homojen cisimlerin eylemsizlik momentleri ile ilgileneceğiz. Kütlenin yoğunluğu verilmemişse yoğunluk 1 olarak alınır.

# Örnek 1

Kütlesi $m_1 = 5$, $m_2 = 8$, $m_3 = 6$, $m_4 = 10$, $m_5 = 3$ olan maddesel noktaların koordinatları sırasıyla $-2$, 3, 4, 6, 10 olduğuna göre bu sistemin başlangıç noktasına göre eylemsizlik momentini bulalım. Şekil ?

$$I_0 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 m_i = (-2)^2 \times 5 + 8 \times 3^2 + 6 \times 4^2 + 10 \times 6^2 + 3 \times 10^2 = 848$$

olur.

# Örnek 2

Analitik düzlemde $(3,2)$, $(2,-1)$, $(-4,3)$, $(1,4)$, $(5,-3)$ noktalarına dağılmış ve kütleleri sırasıyla 5, 4, 8, 6, 2 olan 5 tane maddesel noktanın oluşturduğu sistemin koordinat eksenlerine ve $x=4$, $y=-2$ doğrularına göre eylemsizlik momentlerini bulalım. Şekil ?

⋆ Sistemin toplam kütlesi $m=\sum_{i=1}^{5} m_i = 25$ dir.

$$\begin{aligned}
I_x &= \sum_{i=1}^{5} y_i^2 m_i = 2^2\times 5+(-1)^2\times 4+3^2\times 8+4^2\times 6+(-3)^2\times 2 = 210 = 8.4m\\
I_y &= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 m_i = 3^2\times 5+2^2\times 4+(-4)^2\times 8+1^2\times 6+5^2\times 2 = 245 = 9.8m\\
I_{d_1} &= \sum_{i=1}^{5} r_i^2 m_i = 1^2\times 5+2^2\times 4+8^2\times 8+3^2\times 6+1^2\times 2 = 589 = 23.56m\\
I_{d_2} &= \sum_{i=1}^{5} r_i^2 m_i = 16\times 5+1\times 4+25\times 8+36\times 6+1\times 2 = 502 = 20.8m
\end{aligned}$$

olur.

Eylemsizlik . . .
Örnek 1
Örnek 2
Örnek 3
Örnek 4

# Örnek 3

Taban uzunluğu $a$ ve yüksekliği $b$ olan dikdörtgensel homojen bir levhanın kenarlarından birine göre eylemsizlik momentini bulalım.

- ⋆ Levhayı Şekil ? de görüldüğü gibi dik koordinat düzlemine yerleştirelim.
- ⋆ $[0, a]$ aralığının bir bölüntüsü

$$P = [0 = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_{n-1}, x_n = a] \text{ ve } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

olsun. $i$. aralığa karşılık gelen dilimin kütlesi $\Delta m_i = b\Delta x_i$ ($\rho$ sabit olduğundan $\rho = 1$ alınmıştır) olur. Bu durumda $\Delta x_i$ parçasının $y$-eksenine uzaklığı $r_i \cong x_i$ alınabilir. Bu durumda $\Delta m_i$ nin $y$-eksenine göre eylemsizlik momenti yaklaşık olarak $\Delta m_i = x_i^2 b\Delta x_i$ olur. Bu durumda toplam eylemsizlik momenti yaklaşık olarak

$$I_y \cong \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta m_i = b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i$$

olur. Böylece

$$I_y = \lim_{\|P\| \to 0} b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i = b\int_0^a x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{ba^3}{3}$$

olur. Toplam kütle $m = ab$ olduğundan

$$I_y = \frac{ba^3}{3} = \frac{1}{3}a^2 m$$

olur.

⋆ Benzer şekilde

$$I_x \cong \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \Delta m_i = a \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \Delta y_i$$

olur. Böylece

$$I_x = \lim_{\|P\| \to 0} a \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \Delta y_i = a \int_0^b y^2 \, dy = \frac{ab^3}{3}$$

olur. Toplam kütle $m = ab$ olduğundan

$$I_x = \frac{ab^3}{3} = \frac{1}{3} b^2 m$$

olur. Şekil ?

# Örnek 4

Uzunluğu $b$ olan $\rho$ yoğunluklu homojen bir halatın

**(a).** Sol uç noktasına göre, **(b).** Kütle merkezine göre, **(c).** Sağ uç noktasına göre

eylemsizlik momentlerini bulalım. Şekil ?

★ (a). Halatı başlangıç noktasından itibaren $x$-eksenine yatıralım. $[0,b]$ aralığının bir bölüntüsü

$$P=\{0=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{n-1},x_n=b\} \text{ ve } m_i=m_i-m_{i-1}$$

olsun. $i$. alt aralığa karşılık gelen halatın kütlesi $\Delta m_i=\rho\Delta x_i$ olur. $r_i\in[x_{i-1},x_i]$ olmak üzere kütlesi $\Delta m_i$ olan halat parçasının 0 oktasına göre eylemsizlik momenti yaklaşık olarak $r_i^2\Delta m_i=r_i^2\rho\Delta x_i$ olur. Bu durumda toplam eylemsizlik momenti

$$I_0\cong\sum_{i=1}^{n}r_i^2\Delta m_i=\sum_{i=1}^{n}r_i^2\rho\Delta x_i$$

olur. Böylece $I_0=\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}r_i^2\rho\Delta x_i=\int_0^b\rho x^2\,\mathrm{d}x$ elde edilir. Halatı homojen yani yoğunluğu sabit alırsak

$$I_0=\rho\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}b^3$$

olur. Halatın kütlesi $m=\rho b$ olduğundan $I_0=\frac{1}{3}mb^2$ olur.

★ (b).

$$I_m = \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \, \mathrm{d}m = \rho \int_0^b x^2 \, \mathrm{d}x = \rho \frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{\rho}{3}\left(\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3\right) = \frac{\rho}{3}\left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8}\right) = \frac{\rho b^3}{12}$$

ve halatın kütlesinin $m = \rho b$ olduğu göz önüne alınırsa

$$I_m = \frac{\rho b^3}{12} = \frac{(\rho b) b^2}{12} = \frac{m b^2}{12}$$

olur.

★ (c). Parellel eksen kuralını kullanarak halatın sağ uç noktasına göre eylemsizlik momentini şu şekilde bulabiliriz. $d = \frac{b}{2}$, $M = \rho b$ ve $I_m = \frac{Mb^2}{12}$ olduğundan Parellel eksen teoremine göre

$$I_b = I_m + m d^2 = \frac{m b^2}{12} + \rho b \left(\frac{b}{2}\right)^2 = m \frac{b^2}{12} + m \frac{b^2}{4} = m \left(\frac{b^2}{12} + \frac{b^2}{4}\right) = m \left(\frac{4b^2}{12}\right) = \frac{m b^2}{3}$$

olur.