ANALİZ II

I. Tip Has Olmayan İntegraller

Mahmut KOÇAK

Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

Osmangazi Üniversitesi
Sunum Tarihi: 21 Nisan 2008

I. Tip Has Olmayan İntegraller

(i). $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \geq a$ özelliğindeki her $t \in \mathbb{R}$ için $[a, t]$ aralığı üzerinde integrallenebilir olsun.

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

limiti var ve sonlu ise bu limit değerine f fonksiyonunun $[a, \infty)$ aralığındaki **has olmayan integrali** denir ve

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

şeklinde gösterilir. Buna göre

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

dır.

(1) limiti var ve sonlu ise $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ integraline **yakınsak**, (1) limiti yok veya sonlu değilse $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ integraline **ıraksak** denir.

(ii). $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \leq a$ özelliğindeki her $t \in \mathbb{R}$ için $[t, a]$ aralığı üzerinde integrallenebilir olsun.

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\,dx \tag{2}$$

limiti var ve sonlu ise bu limit değerine f fonksiyonunun $(-\infty, a]$ aralığındaki **has olmayan integrali** denir ve

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

şeklinde gösterilir. Buna göre

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\,dx$$

dır. (2) limiti var ve sonlu ise $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ integraline **yakınsak**, (2) limiti yok veya sonlu değilse $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ integraline **ıraksak** denir.

Not:

(i). $\int\limits_a^\infty \left|f(x)\right| \mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_a^t \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$ integrali f fonksiyonunun grafiği, $x = a$ doğrusu ve x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı olur.

(ii). f fonksiyonunun grafiği, $x = a$ doğrusu ve x-ekseni arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan C cisminin hacmi

$$V(C) = \pi \int\limits_a^\infty (f(x))^2 \,\mathrm{d}x = \pi \lim_{t\to\infty} \int\limits_a^t (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$$

olur.

(iii). f fonksiyonunun grafiği, $x = a$ doğrusu ve x-ekseni arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan C cisminin hacmi

$$V(C) = 2\pi \int\limits_a^\infty x f(x) \,\mathrm{d}x = 2\pi \lim_{t\to\infty} \int\limits_a^\infty x f(x) \,\mathrm{d}x$$

olur.

Not:

(i). $\int\limits_{-\infty}^{a} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to-\infty} \int\limits_{t}^{a} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$ integrali f fonksiyonunun grafiği, $x=a$ doğrusu ve x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı olur.

(ii). f fonksiyonunun grafiği, $x=a$ doğrusu ve x-ekseni arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan C cisminin hacmi

$$V(C) = \pi \int\limits_{-\infty}^{a} (f(x))^2 \mathrm{d}x = \pi \lim_{t\to-\infty} \int\limits_{t}^{a} (f(x))^2 \mathrm{d}x$$

olur.

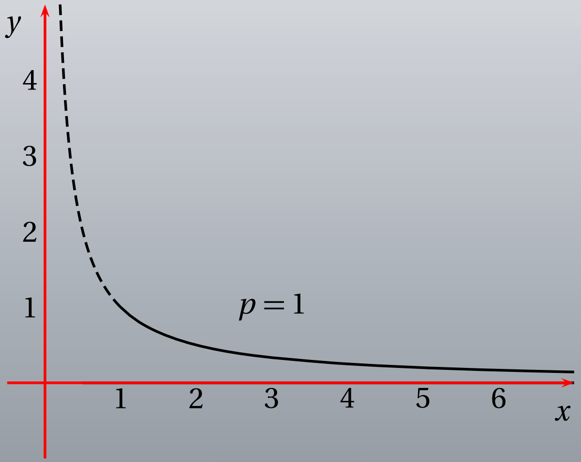
(iii). f fonksiyonunun grafiği, $x=a$ doğrusu ve x-ekseni arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan C cisminin hacmi

$$V(C) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{a} x f(x) \mathrm{d}x = 2\pi \lim_{t\to-\infty} \int\limits_{t}^{a} x f(x) \mathrm{d}x$$

olur.

Örnek

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ integralini p nin durumlarına göre inceleyelim.



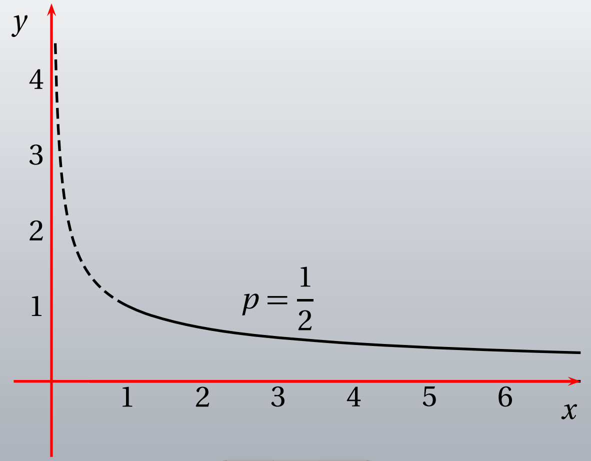
⋆ $p=1$ ise

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^t = \ln t - \ln 1 = \ln t$$

olur. Bu durumda

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{t\to\infty}\ln t = \infty$$

olup $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$ integrali ıraksaktır.



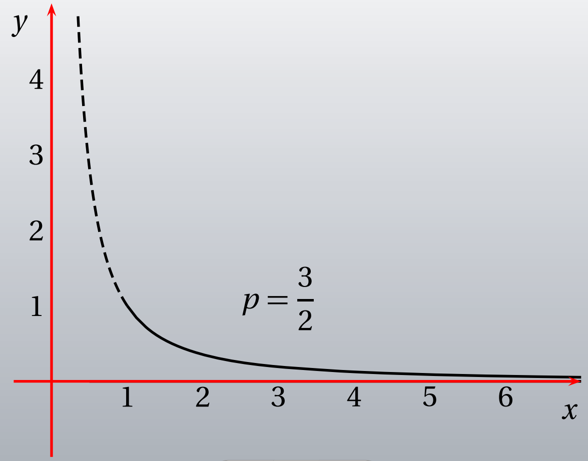
⋆ $p < 1$ olsun. Bu durumda

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^t = \frac{1}{1-p}\left(t^{1-p} - 1\right)$$

olur. $1 - p > 0$ olduğu hesaba katılırsa

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} \left(t^{1-p} - 1\right) = \infty$$

olur. Bu durumda $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ integrali $p < 1$ için ıraksaktır.



⋆ $p > 1$ olsun. Bu durumda

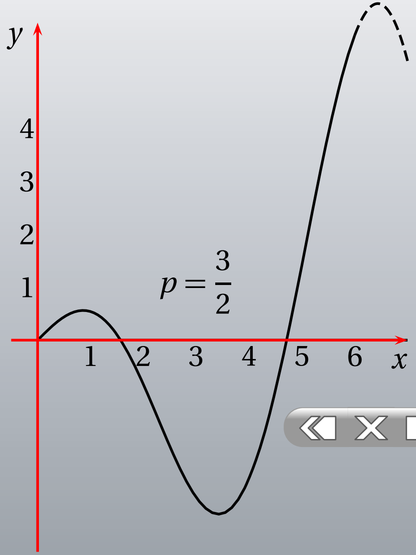
$$\int_1^t \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^t = \frac{1}{1-p}\left(t^{1-p} - 1\right)$$

olur. $1 - p < 0$ olduğu hesaba katılırsa

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} \left(t^{1-p} - 1\right) = \frac{1}{1-p}$$

olur. Bu durumda $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ integrali $p > 1$ için yakınsaktır.

Örnek



$\int_0^\infty x\cos x\,\mathrm{d}x$ integralleri hesaplayalım.

★ Tanım gereğince

$$\int_0^\infty x\cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x\cos x\,\mathrm{d}x$$

dır. Burada $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$ denilirse $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = \sin x$ olur. Bu durumda kısmi integrasyon metodu gereğince $\lim_{t\to\infty}\int_0^t x\cos x\,\mathrm{d}x =$

$$\lim_{t\to\infty}\left(x\sin x\Big|_0^t - \int_0^t \sin x\,\mathrm{d}x \right) = \lim_{t\to\infty}(t\sin t + \cos t - 1)$$

olur. Burada en son ifadenin limiti yoktur. Yani verilen integral ıraksaktır. ✍