ANALİZ II

II. Tip Has Olmayan İntegraller

Mahmut KOÇAK

Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

Osmangazi Üniversitesi
Sunum Tarihi: 21 Nisan 2008

II. Tip Has Olmayan İntegraller

(i). $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $0<\varepsilon<b-a$ özelliğindeki her ε için $[a,b-\varepsilon]$ aralığında integrallenebilir ve b nin solunda sınırsız olsun. Bu durumda

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

limiti mevcut ve sonlu ise $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **integraline yakınsak** denir ve

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

şeklinde tanımlanır. $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ limiti yok veya sonlu değilse bu **integrale ıraksaktır** denir.

(ii). $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $0<\varepsilon<b-a$ özelliğindeki her ε için $[a+\varepsilon,b]$ aralığında integrallenebilir ve a nın sağında sınırsız olsun.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

limiti mevcut ve sonlu ise $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **integraline yakınsak** denir ve

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

şeklinde tanımlanır.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

limiti yok veya sonlu değilse bu **integrale ıraksaktır** denir.

II. Tip Has Ol...
Not:
Not:
Örnek
Örnek

Not:

(i). $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^t |f(x)|\,\mathrm{d}x$ integrali f fonksiyonunun grafiği, $x=a$, $x=b$ doğruları ve x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı olur.

(ii). f fonksiyonunun grafiği, x-ekseni ve $x=a$, $x=b$ doğruları arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan C cisminin hacmi

$$V(C)=\pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x=\pi\lim_{t\to b^-}\int_a^t (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

olur.

(iii). f fonksiyonunun grafiği, x-ekseni ve $x=a$, $x=b$ doğruları arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan C cisminin hacmi

$$V(C)=2\pi\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\lim_{t\to b^-}\int_a^t x f(x)\,\mathrm{d}x$$

olur.

Not:

(i). $\displaystyle\int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} \int_t^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$ integrali f fonksiyonunun grafiği, $x=a$, $x=b$ doğruları ve x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı olur.

(ii). f fonksiyonunun grafiği, x-ekseni ve $x=a$, $x=b$ doğruları arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan C cisminin hacmi

$$V(C)=\pi\int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x = \pi \lim_{t\to a^+} \int_t^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$$

olur.

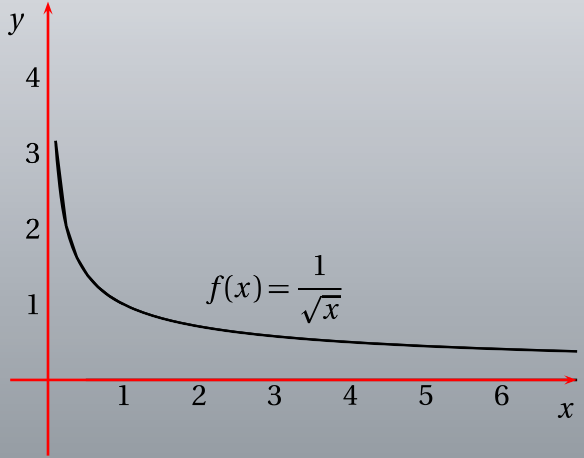
(iii). f fonksiyonunun grafiği, x-ekseni ve $x=a$, $x=b$ doğruları arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan C cisminin hacmi

$$V(C)=2\pi\int_a^b x f(x) \mathrm{d}x = 2\pi \lim_{t\to a^+} \int_t^b x f(x) \mathrm{d}x$$

olur.

Örnek

$\displaystyle\int_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ integralini hesaplayalım.



100.0

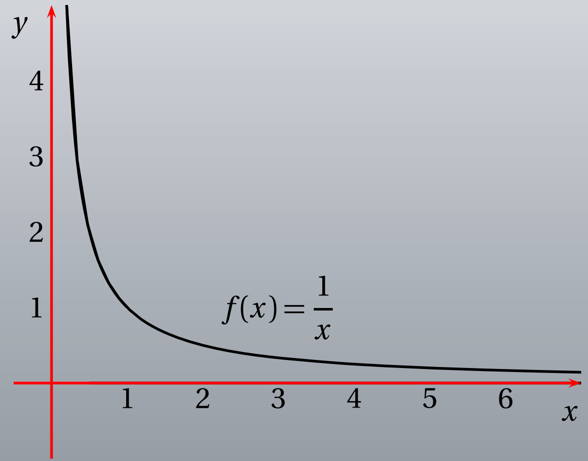
$$\int_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^9 \right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(2\sqrt{9} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 6$$

olur ve integral yakınsaktır. ✍

II. Tip Has Ol . . .
Not:
Not:
Örnek
Örnek

Örnek

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ integralinin yakınsaklığını inceleyelim.



100.0

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} &= \lim_{\varepsilon\to 1^-}\int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 1^-} \ln|x-1|\Big|_0^{\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 1^-}(\ln|\varepsilon-1|-\ln 1) = -\infty\end{aligned}$$

olduğundan verilen integrali ıraksaktır.✍