# ANALİZ II

# III. Tip Has Olmayan İntegraller

Mahmut KOÇAK




Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

Osmangazi Üniversitesi
Sunum Tarihi: 21 Nisan 2008

# III. Tip Has Olmayan İntegraller

**(i).** $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c\in(a,b)$ olmak üzere $a+\varepsilon_1<c$ ve $c<b-\varepsilon_2$ özelliğindeki her $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ için $[a+\varepsilon_1,c]$ ve $[c,b-\varepsilon_2]$ aralıklarında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_{a+\varepsilon_1}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ve } \lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

veya

$$\lim_{t\to a^+}\int_{t}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ve } \lim_{t\to b^-}\int_{c}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

limitlerinin her ikisi de varsa bu limitlerin toplamına $f$ nin $(a,b)$ aralığındaki **integrali** denir ve

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_{a+\varepsilon_1}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

veya

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to b^-}\int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

şeklinde yazılır. (1) limitlerinin her ikisi de varsa $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ integraline **yakınsak** ve (1) limitlerinden en az biri yoksa $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ integraline **ıraksak** denir.

**(ii).** $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c\in(a,\infty)$ olmak üzere $a+\varepsilon<c$ ve $c<t$ özelliğindeki her $\varepsilon>0$ ve her $t$ için $[a+\varepsilon,c]$ ve $[c,t]$ aralıklarında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^c f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ve } \lim_{t\to\infty}\int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

veya

III. Tip Has . . .
Not:
Örnek
Örnek
Örnek

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^c f(x)\,dx \text{ ve } \lim_{t\to\infty}\int_c^t f(x)\,dx \qquad (2)$$

limitlerinin her ikisi de varsa bu limitlerin toplamına $f$ nin $(a,\infty)$ aralığındaki **integrali** denir ve

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{a+\varepsilon_1}^c f(x)\,dx + \lim_{t\to\infty}\int_c^t f(x)\,dx$$

veya

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{t\to\infty}\int_c^t f(x)\,dx$$

şeklinde yazılır. (2) limitlerinin her ikisi de varsa $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integraline **yakınsak** ve (2) limitlerinden en az biri yoksa $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integraline **ıraksak** denir.

III. Tip Has . . .
Not:
Örnek
Örnek
Örnek

**(iii).** $f:(-\infty,a)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c\in(-\infty,a)$ olmak üzere $t<c$ özelliğindeki her $t$ ve $c<a-\varepsilon$ özelliğindeki her $\varepsilon>0$ için $[c,a-\varepsilon]$ ve $[t,c]$ aralıklarında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_c^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ve } \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

veya

$$\lim_{t\to a^-}\int_c^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ve } \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

limitlerinin her ikisi de varsa limitlerin toplamına $f$ nin $(-\infty,a)$ aralığındaki **integrali** denir ve

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_c^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

veya

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^-}\int_c^{t} f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

şeklinde yazılır. (3) limitlerinin her ikisi de varsa

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

integraline **yakınsak** ve (3) limitlerinden en az biri yoksa

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

integraline **ıraksak** denir.

**(iv).** $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c\in(-\infty,\infty)$ olmak üzere $t_1<c$ ve $t_2>c$ özelliğindeki her $t_1,t_2$ için $[t_1,c]$ ve $[c,t_2]$ aralıklarında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ve } \lim_{t_2\to\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

limitlerinin her ikisi de varsa limitlerin toplamına $f$ nin $(-\infty,\infty)$ aralığındaki **integrali** denir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t_2\to\infty}\int_{c}^{t_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

şeklinde yazılır. Buna göre

III. Tip Has . . .
Not:
Örnek
Örnek
Örnek

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t_2\to\infty}\int_{c}^{t_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

dır. (4) limitlerinin her ikisi de var ve sonlu iseler

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

integraline **yakınsak** , (4) limitlerinden en az bir tanesi yok veya sonlu değilse

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

integraline **ıraksak** denir.

# Not:

**(i).** III.tip integrallerin yakınsaklığı incelenirken I.tip ve II.tip integrallerin yakınsaklık testleri kullanılabilir.

**(ii).** (iv).tip integrallerin yakınsaklığı incelenirken dikkatli olunmalıdır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

integrali yakınsak ise

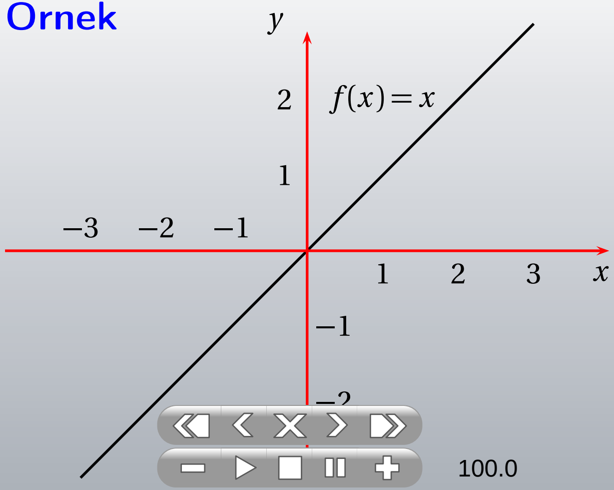
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

olur. Diğer yandan

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

limiti olmasına rağmen integral yakınsak olmayabilir.

# Örnek



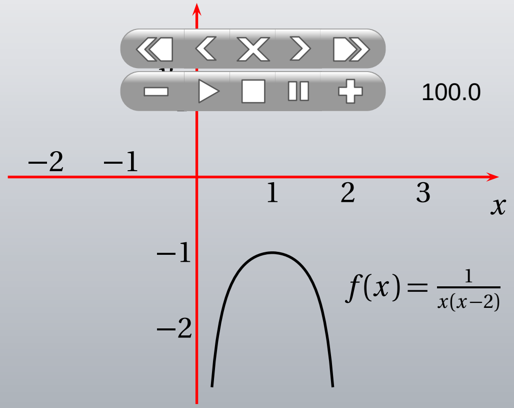

$c = 0$ için $\displaystyle\int_0^\infty x\,dx$ ve $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\,dx$ integrallerinin yakınsaklığını inceleyelim.

$$\int_0^\infty x\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \infty$$

olduğundan $\displaystyle\int_0^\infty x\,dx$ integrali yakınsak değildir. Bu durumda $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ integrali yakınsak olamaz. Diğer yandan

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^t x\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-t}^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{(-t)^2}{2}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}\right) = 0 \text{ dır.}$$

# Örnek




$c=1$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)} \quad \text{ve} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x(x-2)}$$

integrallerinin yakınsaklığını inceleyelim.

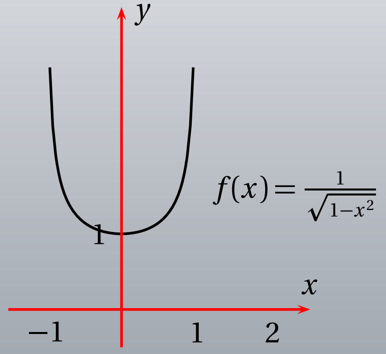
$$\int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)} = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{dx}{x(x-2)} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\left(\int_t^1 \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\left(\left(\ln|x-2|-\ln x\right)\Big|_t^1\right) = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\left(\ln|1-2|-\ln 1-\ln|t-2|+\ln t\right) = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\left(-\ln|t-2|+\ln t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln 2+\lim_{t\to 0^+}\ln t\right) = -\infty$$

olduğundan $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x(x-2)}$ integrali yakınsak değildir. Bu durumda $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x(x-2)}$ integrali yakınsak olamaz.✍

## Örnek




100.0

(i). $$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to -1^+} \int\limits_{t}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to -1^+} \left( \arcsin x \Big|_t^0 \right)$$
$$= \lim_{t\to -1^+} (\arcsin 0 - \arcsin t) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

olur.

III. Tip Has . . .
Not:
Örnek
Örnek
Örnek

$$\textbf{(ii).}\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1^-}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1^-}\left(\arcsin x\Big|_0^t\right) = \lim_{t\to 1^-}(\arcsin t - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

olur. (i) ve (ii) gereğince her iki integralde yakınsak olduğundan $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ olur.