ESOGU FEN-ED.FAK MATEMATİK BÖLÜMÜ

ANALİZ II

Parametrik Eğrilerin Yay Uzunluğu

Mahmut KOÇAK

Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

http://www2.ogu.edu.tr/~mkocak/
Sunum Tarihi: 23 Nisan 2008

Parametrik Eğrilerin Yay Uzunluğu

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli türevi olan iki fonksiyon olmak üzere her $t\in[a,b]$ için $f'(t)\neq 0$ veya $g'(t)\neq 0$ olsun.

dir. Ortalama değer teoremi gereğince her $i=1,2,\cdots,n$ için

$$\frac{f(t_i)-f(t_{i-1})}{\Delta t_i}=f'(t_i') \text{ ve } \frac{g(t_i)-g(t_{i-1})}{\Delta t}=g'(t_i'')$$

olacak şekilde $t_i', t_i'' \in (t_{i-1}, t_i)$ vardır.Bu durumda

$$\triangle l_i \cong \Delta s_i = \Delta t_i \sqrt{\left(f'(t_i')\right)^2+\left(g'(t_i'')\right)^2}$$

olur.

Böylece

$$L \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \sqrt{\left(f'(t_i')\right)^2+\left(g'(t_i'')\right)^2}$$

olur. Bu durumda

$$\lim_{\|P\|\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta t \sqrt{\left(f'(t_i')\right)^2+\left(g'(t_i'')\right)^2}\right)=\int_a^b \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

olduğundan

$$L=\int_a^b \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,\mathrm{d}t=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

olur.

Örnek 1

$a \neq 0$ olmak üzere $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ parametrik denklemiyle verilen çemberin yay uzunluğunu bulalım.

25.0

olur.✍

Örnek 2

$a \neq 0$ olmak üzere $x = e^{at}\cos t$, $y = e^{at}\sin t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ parametrik denklemiyle verilen eğrinin yay uzunluğunu bulalım. **Bekleyiniz. Herşey otomatik olarak gelecek.**

100.0

$=$

$=$ $=$ $=$

olur.✍