



Mahmut KOÇAK

Paremetrik...

Örnek 1

Örnek 2





Paremetrik Eğrilerle Sınırlı Bölgenin Alanı

$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevi olan bir fonksiyon olmak üzere

$$x = f(t), y = g(t)$$

parametrik denkleminin eğrisi C ve t , a dan b ya değişirken eğri tekrar etmesin. Her $x \in [a, b]$ için $g(t) \geq 0$ (C eğrisinin x -ekseninin altında hiç bir noktası olmadığını) ve $f'(t) \geq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda C eğrisinin yönü t , a dan b ye artarken soldan sağa doğru olur.

$$P = \{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}, t_n = b\},$$

$[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü ve $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ olsun. Bu durumda C eğrisi, x -ekseni, $x = f(t_{i-1})$ ve $x = f(t_i)$ doğrularının sınırladığı A bölgesinin alanı yaklaşık olarak taban uzunluğu $f(t_i) - f(t_{i-1})$ ve yüksekliği $g(t_i)$ olan A_i dikdörtgenlerin alanları toplamına eşittir.

Şekil ? ya bakınız. Yani

$$A \cong \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))g(t_i)$$

dir. Diğer yandan ortalama değer teoremi gereğince

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = \Delta t_i f'(t'_i)$$

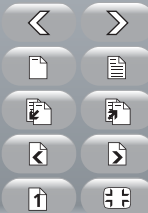
olacak şekilde $t'_i \in (t_{i-1}, t_i)$ noktası vardır. Böylece

$$A \cong \sum_{i=1}^n f'(t'_i)g(t_i) \Delta t_i$$

Paremetrik...

Örnek 1

Örnek 2





olur.

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f'(t'_i) g(t_i) \Delta t_i \right) = \int_a^b f'(t) g(t) dt$$

olur. Böylece C eğrisi, x -ekseni, $x = f(a)$ ve $x = f(b)$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı

$$A = \int_a^b f'(t) g(t) dt$$

olur.

Benzer şekilde her $t \in [a, b]$ için C eğrisi, x -ekseni, $x = f(a)$ ve $x = f(b)$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı A olmak üzere

$$\star f'(t) \geq 0 \text{ ve } g(t) < 0 \text{ ise } A = - \int_a^b f'(t) g(t) dt,$$

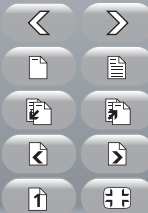
$$\star f'(t) \leq 0 \text{ ve } g(t) \geq 0 \text{ ise } A = - \int_a^b f'(t) g(t) dt,$$

$$\star f'(t) \leq 0 \text{ ve } g(t) \leq 0 \text{ ise } A = \int_a^b f'(t) g(t) dt$$

Parametrik...

Örnek 1

Örnek 2





olduğu gösterilir. Bu durumda A_1 , C eğrisi, x -ekseninin

$$f'(t)g(t) \geq 0$$

özelliğini sağlayan $x = f(t)$ lerin bölgesi arasında kalan bölgenin alanı ve A_2 , C eğrisi, x -ekseninin

$$f'(t)g(t) < 0$$

özelliğini sağlayan $x = f(t)$ lerin bölgesi arasında kalan bölgenin alanı olmak üzere

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = A_1 - A_2$$

olur. Özel olarak C eğrisi kendisini kesmeyen bir eğri olmak üzere

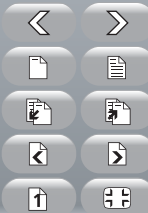
$$\star t \text{ artarken } C \text{ nin yönü saatin dönme yönündeyse } A = \int_a^b f'(t)g(t) dt \text{ olur.}$$

$$\star t \text{ artarken } C \text{ nin yönü saatin dönme yönünün tersi yönündeyse } A = - \int_a^b f'(t)g(t) dt \text{ olur.}$$

Parametrik ...

Örnek 1

Örnek 2





Örnek 1

★ $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) parametrik denklemleriyle verilen elipsin sınırladığı bölgenin alanını bulalım. Şekil ? ye bakınız.

★ Şekilde de görüldüğü gibi elipsin alanı dört eşit alanın toplamına eşittir. $f(t) = a \cos t$ ve $g(t) = b \sin t$ olmak üzere her $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için

$$f'(t) = -a \sin t \leq 0 \text{ ve } y = b \sin t \geq 0$$

olduğundan

$$A_1 = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a \sin t) b \sin t \, dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) \, dt = \frac{ab}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}$$

olur. Böylece

$$A = 4A_1 = 4 \frac{\pi ab}{4} = \pi ab$$

olur. ↵

Paremetrik ...

Örnek 1

Örnek 2





Örnek 2

★ $a > 0$ olmak üzere $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) parametrik eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulalım. Şekil ?'ye bakınız.

★ Şekil de görüldüğü gibi istenilen alan A birbirlerine eşit A_1, A_2, A_3 ve A_4 alanlarının toplamına eşittir. $f(t) = a \cos^3 t$ ve $g(t) = a \sin^3 t$ olmak üzere her $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $f'(t) = -3a \cos^2 t \sin t \leq 0$ ve $y = a \sin^3 t \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} A_1 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-3a \cos^2 t \sin t) a \sin^3 t \, dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^4 t \, dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^4 t \, dt \\ &= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) \, dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \, dt - 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t \, dt \end{aligned}$$

olur. İndirgeme formülü kullanılırsa $A_1 = \frac{3\pi a^2}{32}$ olarak bulunur.

Böylece

$$A = 4A_1 = 4 \left(\frac{3\pi a^2}{32} \right) = \frac{3\pi a^2}{8} \text{ olur.} \quad \rightarrow$$

Paremetrik...

Örnek 1

Örnek 2

