Mahmut KOÇAK

Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

http://www2.ogu.edu.tr/~mkocak/
Sunum Tarihi: Nisan 17, 2008

Paremetrik Eğrilerle Sınırlı Bölgenin Alanı

$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli türevi olan bir fonksiyon olmak üzere

$$x=f(t),\ y=g(t)$$

parametrik denkleminin eğrisi C ve t, a dan b ya değişirken eğri tekrar etmesin. Her $x\in[a,b]$ için $g(t)\geq 0$ (C eğrisinin x-ekseninin altında hiç bir noktası olmadığını) ve $f'(t)\geq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda C eğrisinin yönü t, a dan b ye artarken soldan sağa doğru olur.

$$P=\{a=t_0,t_1,t_2,\cdots,t_{i-1},t_i,t_{i+1},\cdots,t_{n-1},t_n=b\},$$

$[a,b]$ aralığınının bir bölüntüsü ve $\triangle t_i=t_i-t_{i-1}$ olsun. Bu durumda C eğrisi, x-ekseni, $x=f(t_{i-1})$ ve $x=f(t_i)$ doğrularının sınırladığı A bölgesinin alanı yaklaşık olarak taban uzunluğu $f(t_i)-f(t_{i-1})$ ve yüksekliği $g(t_i)$ olan A_i dikdörtgenlerin alanları toplamına eşittir. Şekil ?? ya bakınız. Yani

$$A\cong\sum_{i=1}^{n}(f(t_i)-f(t_{i-1}))g(t_i)$$

dir. Diğer yandan ortalama değer teoremi gereğince

$$f(t_i)-f(t_{i-1})=\triangle t_i f'(t_i')$$

olacak şekilde $t_i'\in(t_{i-1},t_i)$ noktası vardır. Böylece

$$A\cong\sum_{i=1}^{n}f'(t_i')g(t_i)\triangle t_i$$

olur.

$$A=\lim_{\|P\|\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f'(t_i')g(t_i)\triangle t_i\right)=\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

olur. Böylece C eğrisi, x-ekseni, $x=f(a)$ ve $x=f(b)$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı

$$A=\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

olur.

Benzer şekilde her $t\in[a,b]$ için C eğrisi, x-ekseni, $x=f(a)$ ve $x=f(b)$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı A olmak üzere

⋆ $f'(t)\geq 0$ ve $g(t)<0$ ise $A=-\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$,

⋆ $f'(t)\leq 0$ ve $g(t)\geq 0$ ise $A=-\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$,

⋆ $f'(t)\leq 0$ ve $g(t)\leq 0$ ise $A=\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$

Paremetrik . . .
Örnek 1
Örnek 2

olduğu gösterilir. Bu durumda A_1, C eğrisi, x-ekseninin

$$f'(t)g(t) \geq 0$$

özelliğini sağlayan $x = f(t)$ lerin bölgesi arasında kalan bölgenin alanı ve A_2, C eğrisi, x-ekseninin

$$f'(t)g(t) < 0$$

özelliğini sağlayan $x = f(t)$ lerin bölgesi arasında kalan bölgenin alanı olmak üzere

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = A_1 - A_2$$

olur. Özel olarak C eğrisi kendisini kesmeyen bir eğri olmak üzere

- ⋆ t artarken C nin yönü saatin dönme yönündeyse $A = \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ olur.

- ⋆ t artarken C nin yönü saatin dönme yönünün tersi yönündeyse $A = -\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ olur.

Örnek 1

⋆ $x = a\cos t,\ y = b\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$ parametrik denklemleriyle verilen elipsin sınırladığı bölgenin alanını bulalım. Şekil ? ye bakınız.

⋆ Sekilde de görüldüğü gibi elipsin alanı dört eşit alanın toplamına eşittir. $f(t) = a\cos t$ ve $g(t) = b\sin t$ olmak üzere her $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için

$$f'(t) = -a\sin t \le 0 \text{ ve } y = b\sin t \ge 0$$

olduğundan

$$A_1 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a\sin t) b\sin t\,\mathrm{d}t = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}$$

olur. Böylece

$$A = 4A_1 = 4\frac{\pi ab}{4} = \pi ab$$

olur.✍

Örnek 2

★ $a>0$ olmak üzere $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\le t\le 2\pi)$ parametrik eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulalım. Şekil ? ye bakınız.

★ Sekil de görüldüğü gibi istenilen alan A birbirlerine eşit A_1, A_2, A_3 ve A_4 alanlarının toplamına eşittir. $f(t)=a\cos^3 t$ ve $g(t)=a\sin^3 t$ olmak üzere her $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ için $f'(t)=-3a\cos^2 t\sin t\le 0$ ve $y=a\sin^3 t\ge 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} A_1 &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)a\sin^3 t\,\mathrm{d}t = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^4 t\,\mathrm{d}t = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 t\right)\sin^4 t\,\mathrm{d}t \\ &= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 t-\sin^6 t\right)\mathrm{d}t = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,\mathrm{d}t - 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

olur. İndirgeme formülü kullanılırsa $A_1=\dfrac{3\pi a^2}{32}$ olarak bulunur. Böylece $A=4A_1=4\left(\dfrac{3\pi a^2}{32}\right)=\dfrac{3\pi a^2}{8}$ olur.✍