



Kutupsal Ko...

Örnek 1

Örnek 2

Kutupsal Ko...

Örnek 3

Örnek 4

Mahmut KOÇAK





Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğu

Kutupsal koordinatlarda türevlenebilen sürekli $r = f(\theta)$ ($\phi \leq \theta \leq \varphi$) fonksiyonu verilsin.

$$P = \{\theta_0 = \phi, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{i-1}, \theta_i, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n = \varphi\}$$

$[\phi, \varphi]$ aralığınının bir bölüntüsü, $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ ve $r_i = f(\theta_i)$ olmak üzere

$$\Delta r_i = f(\theta_i) - f(\theta_{i-1})$$

olsun. Yarıçapı r olan bir çemberin çevresinin uzunluğu $2\pi r$ olduğundan $\Delta\theta_i$ açılı çember sektörünün yay uzunluğu $r_i \Delta\theta_i$ olur. Buna göre f nin θ_i ve θ_{i-1} arasında kalan eğri parçasının uzunluğu Δl_i yaklaşık olarak $\sqrt{(\Delta r_i)^2 + (r_i \Delta\theta_i)^2}$ dir. **Şekil ?** ya bakınız. Bu durumda

$$\Delta l_i \cong \sqrt{(\Delta r_i)^2 + (r_i \Delta\theta_i)^2} = \sqrt{(\Delta\theta_i)^2 \left(\left(\frac{\Delta r_i}{\Delta\theta_i} \right)^2 + r_i^2 \right)} = \Delta\theta_i \sqrt{\left(\frac{\Delta r_i}{\Delta\theta_i} \right)^2 + r_i^2}$$

olur. Buna göre $L \cong \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{\Delta r_i}{\Delta\theta_i} \right)^2 + r_i^2} \right) \Delta\theta_i$ olur. Buradan

$$L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\left(\frac{\Delta r_i}{\Delta\theta_i} \right)^2 + r_i^2} \right) \Delta\theta_i \right) = \int_{\phi}^{\varphi} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} d\theta$$

olur.

Kutupsal Ko...

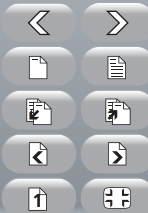
Örnek 1

Örnek 2

Kutupsal Ko...

Örnek 3

Örnek 4





Örnek 1

- ★ $r = 1 + \cos \theta$ kardioid eğrisinin yay uzunluğunu bulalım. Şekil ? ye bakınız.
- ★ Kardioid x -ksenine göre simetrik olduğundan önce r eğrisinin, $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ doğruları arasında kalan kısmının yay uzunluğunu bulalım. $f(\theta) = 1 + \cos \theta$ olduğundan $f'(\theta) = -\sin \theta$ olur. Buna göre

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^{\pi} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin \theta)^2 + (1 + \cos \theta)^2} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + 1 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} d\theta = 2 \int_0^{\pi} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \\ &= 4 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 4 \end{aligned}$$

olur. Böylece $L = 2L_1 = 8$ olur. ☺

Kutupsal Ko...

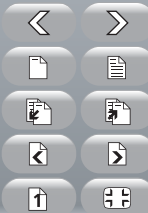
Örnek 1

Örnek 2

Kutupsal Ko...

Örnek 3

Örnek 4





Örnek 2

★ $r = e^{-\theta}$ logaritmik siralinin yay uzunluğunu bulalım. Şekil ? ye bakınız.

★ $f(\theta) = e^\theta$ olduğundan $f'(\theta) = -e^{-\theta}$ olur. Bu durumda $\theta_1 > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \lim_{\theta_1 \rightarrow \infty} \int_0^{\theta_1} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} d\theta = \lim_{\theta_1 \rightarrow \infty} \int_0^{\theta_1} \sqrt{(-e^{-\theta})^2 + (e^{-\theta})^2} d\theta = \lim_{\theta_1 \rightarrow \infty} \int_0^{\theta_1} \sqrt{2e^{-2\theta}} d\theta \\
 &= \lim_{\theta_1 \rightarrow \infty} \sqrt{2} \int_0^{\theta_1} e^{-\theta} d\theta = \lim_{\theta_1 \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{2} e^{-\theta} \Big|_0^{\theta_1} \right) = \lim_{\theta_1 \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{2} (e^{-\theta_1} - e^{-0}) \right) \\
 &= \sqrt{2} \lim_{\theta_1 \rightarrow \infty} (1 - e^{-\theta_1}) = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

olur. ↵

Kutupsal Ko...

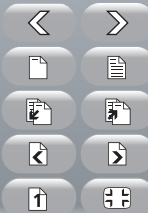
Örnek 1

Örnek 2

Kutupsal Ko...

Örnek 3

Örnek 4





Kutupsal Koordinatlarda Alan

Kutupsal koordinatlarda sürekli $r = f(\theta)$ ($\phi \leq \theta \leq \varphi$) fonksiyonu verilsin.

$$P = \{\theta_0 = \phi, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{i-1}, \theta_i, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n = \varphi\},$$

$[\phi, \varphi]$ aralığınının bir bölüntüsü, $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ ve $r_i = f(\theta_i)$ olmak üzere $\Delta r_i = f(\theta_i) - f(\theta_{i-1})$ olsun. Yarıçapı r olan bir çemberin alanı πr^2 olduğundan $\Delta\theta_i$ açılı çember sektörünün alanı $\frac{r_i^2 \Delta\theta_i}{2}$ olur. Buna göre f nin grafiği, $\theta = \theta_{i-1}$ ve $\theta = \theta_i$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı A_i yaklaşık olarak $\frac{r_i^2 \Delta\theta_i}{2}$ dir. **Şekil 1** ve **Şekil 2** ya bakınız. Bu durumda

$$A_i \cong \frac{r_i^2 \Delta\theta_i}{2} = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i$$

olur. Buna göre A , r eğrisi, $\theta = \theta_1$ ve $\theta = \theta_2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı olmak üzere

$$A \cong \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta\theta_i$$

olur. Buradan

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta\theta_i \right) = \frac{1}{2} \int_{\phi}^{\varphi} (f(\theta))^2 d\theta$$

elde edilir.

Kutupsal Ko...

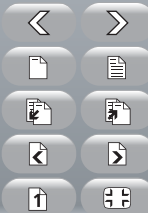
Örnek 1

Örnek 2

Kutupsal Ko...

Örnek 3

Örnek 4



Kutupsal koordinatlarda $r_1 = f(\theta)$, $r_2 = g(\theta)$ ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$) sürekli fonksiyonları verilsin. $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ özelliğindeki her θ için $r_1 = f(\theta) \leq g(\theta) = r_2$ ise $\theta = \theta_1$ ve $\theta = \theta_2$ doğruları ve r_1, r_2 fonksiyonları ile sınırlı bölgenin alanı

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (g(\theta))^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f(\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} ((g(\theta))^2 - (f(\theta))^2) d\theta$$

olur. [Şekil ?](#) ya bakınız.



Kutupsal Ko...

Örnek 1

Örnek 2

Kutupsal Ko...

Örnek 3

Örnek 4






Örnek 3

★ $r = \sin(3\theta)$ gülünün sınırladığı alanı bulalım. Şekil ? ye bakınız.

★ Şekilde de görüldüğü gibi istenilen alan birbirine eşit A_1, A_2 ve A_3 alanlarının toplamıdır. O halde önce r nin grafiği $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ doğruları arasında kalan alanı hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(3\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 - \cos(6\theta)) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos(6\theta)) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(6\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{24} \sin(6\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{3} - \frac{1}{24} \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{24} \sin(2\pi) = \frac{\pi}{12}
 \end{aligned}$$

olur. Böylece $A = 3A_1 = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$ olur. 

Kutupsal Ko...

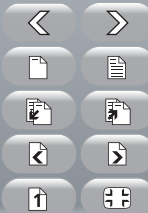
Örnek 1

Örnek 2

Kutupsal Ko...

Örnek 3

Örnek 4





Örnek 4

★ $r_1 = 2$ ve $r_2 = 1 + \cos \theta$ ve eğrileri arasında kalan alanı bulalım. Şekil ? ye bakınız.

★ Sekilde görüldüğü gibi istenilen alan iki eşit A_1 ve A_2 alanlarının toplamıdır. O halde önce $r_1 = 2$, $r_2 = 1 + \cos \theta$ fonksiyonlarının grafikleri ve $\theta = 0$, $\theta = \pi$ doğruları arasında kalan A_1 alanını bulalım. $\theta \in [0, \pi]$ için $r_1 = 2 \geq 1 + \cos \theta = r_2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left((f_1(\theta))^2 - (f_2(\theta))^2 \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(2^2 - (1 + \cos \theta)^2 \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(4 - (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(4 - \left(1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{5}{2} - 2 \cos \theta - \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} \theta - 2 \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \frac{5}{2} \pi = \frac{5\pi}{4}
 \end{aligned}$$

olur. Buna göre $A = 2A_1 = 2 \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$ olur. \neq

Kutupsal Ko...

Örnek 1

Örnek 2

Kutupsal Ko...

Örnek 3

Örnek 4

