Mahmut KOÇAK

Hazırlama Tarihi: Nisan 10, 2008

http://www2.ogu.edu.tr/~mkocak/
Sunum Tarihi: Nisan 17, 2008

Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğu

Kutupsal koordinatlarda türevlenebilen sürekli $r=f(\theta)$ $(\phi\leq\theta\leq\varphi)$ fonksiyonu verilsin.

$$P=\{\theta_0=\phi,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{i-1},\theta_i,\cdots,\theta_{n-1},\theta_n=\varphi\}$$

$[\phi,\varphi]$ aralığının bir bölüntüsü, $\triangle\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}$ ve $r_i=f(\theta_i)$ olmak üzere

$$\triangle r_i=f(\theta_i)-f(\theta_{i-1})$$

olsun. Yarıçapı r olan bir çemberin çevresinin uzunluğu $2\pi r$ olduğundan $\triangle\theta_i$ açılı çember sektörünün yay uzunluğu $r_i\triangle\theta_i$ olur. Buna göre f nin θ_i ve θ_{i-1} arasında kalan eğri parçasının uzunluğu $\triangle l_i$ yaklaşık olarak $\sqrt{(\triangle r_i)^2+(r_i\triangle\theta_i)^2}$ dir. Şekil ?? ya bakınız. Bu durumda

$$\triangle l_i\cong\sqrt{(\triangle r_i)^2+(r_i\triangle\theta_i)^2}=\sqrt{(\triangle\theta_i)^2\left(\left(\frac{\triangle r_i}{\triangle\theta_i}\right)^2+{r_i}^2\right)}=\triangle\theta_i\sqrt{\left(\frac{\triangle r_i}{\triangle\theta_i}\right)^2+{r_i}^2}$$

olur. Buna göre $L\cong\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{\triangle r_i}{\triangle\theta_i}\right)^2+{r_i}^2}\right)\triangle\theta_i$ olur. Buradan

$$L=\lim_{\|P\|\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\left(\frac{\triangle r_i}{\triangle\theta_i}\right)^2+{r_i}^2}\right)\triangle\theta_i\right)=\int_{\phi}^{\varphi}\sqrt{(f'(\theta))^2+(f(\theta))^2}\,d\theta$$

olur.

Örnek 1

⋆ $r=1+\cos\theta$ kardioid eğrisinin yay uzunluğunu bulalım. Şekil ?? ye bakınız.

⋆ Kardioid x-eksenine göre simetrik olduğundan önce r eğrisinin, $\theta=0$ ve $\theta=\pi$ doğruları arasında kalan kısmının yay uzunluğunu bulalım. $f(\theta)=1+\cos\theta$ olduğundan $f'(\theta)=-\sin\theta$ olur. Buna göre

$$1+\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^\pi \sqrt{(f'(\theta))^2+(f(\theta))^2}\,d\theta=\int_0^\pi \sqrt{(-\sin\theta)^2+(1+\cos\theta)^2}\,d\theta=\int_0^\pi \sqrt{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\cos\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta=\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta=\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta=2\int_0^\pi \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta \\ &= 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^\pi=4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=4 \end{aligned}$$

olur. Böylece $L=2L_1=8$ olur.✍

Kutupsal Ko...
Örnek 1
Örnek 2
Kutupsal Ko...
Örnek 3
Örnek 4

Örnek 2

⋆ $r = e^{-\theta}$ logaritmik sipiralinin yay uzunluğunu bulalım. Şekil ?? ye bakınız.

⋆ $f(\theta) = e^{\theta}$ olduğundan $f'(\theta) = -e^{-\theta}$ olur. Bu durumda $\theta_1 > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
L_1 &= \lim_{\theta_1 \to \infty} \int_0^{\theta_1} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}\, d\theta = \lim_{\theta_1 \to \infty} \int_0^{\theta_1} \sqrt{(-e^{-\theta})^2 + (e^{-\theta})^2}\, d\theta = \lim_{\theta_1 \to \infty} \int_0^{\theta_1} \sqrt{2e^{-2\theta}}\, d\theta \\
&= \lim_{\theta_1 \to \infty} \sqrt{2} \int_0^{\theta_1} e^{-\theta}\, d\theta = \lim_{\theta_1 \to \infty} \left(-\sqrt{2} e^{-\theta} \Big|_0^{\theta_1} \right) = \lim_{\theta_1 \to \infty} \left(-\sqrt{2} \left(e^{-\theta_1} - e^{-0} \right) \right) \\
&= \sqrt{2} \lim_{\theta_1 \to \infty} \left(1 - e^{-\theta_1} \right) = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

olur. ✍

Kutupsal Koordinatlarda Alan

Kutupsal koordinatlarda sürekli $r=f(\theta)$ $(\phi \leq \theta \leq \varphi)$ fonksiyonu verilsin.

$$P=\{\theta_0=\phi, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{i-1}, \theta_i, \cdots, \theta_{n-1}, \theta_n=\varphi\},$$

$[\phi, \varphi]$ aralığının bir bölüntüsü, $\triangle\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}$ ve $r_i=f(\theta_i)$ olmak üzere $\triangle r_i=f(\theta_i)-f(\theta_{i-1})$ olsun. Yarıçapı r olan bir çemberin alanı πr^2 olduğundan $\triangle\theta_i$ açılı çember sektörünün alanı $\dfrac{r_i^2\triangle\theta_i}{2}$ olur. Buna göre f nin grafiği, $\theta=\theta_{i-1}$ ve $\theta=\theta_i$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı A_i yaklaşık olarak $\dfrac{r_i^2\triangle\theta_i}{2}$ dir. Şekil ?? ve Şekil ?? ya bakınız. Bu durumda

$$A_i \cong \frac{r_i^2\triangle\theta_i}{2}=\frac{1}{2}r_i^2\triangle\theta_i$$

olur. Buna göre A, r eğrisi, $\theta=\theta_1$ ve $\theta=\theta_2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı olmak üzere

$$A \cong \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2\triangle\theta_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}r_i^2\triangle\theta_i$$

olur. Buradan

$$A=\lim_{\|P\|\to 0}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}r_i^2\triangle\theta_i\right)=\frac{1}{2}\int_{\phi}^{\varphi}(f(\theta))^2\,d\theta$$

elde edilir.

Kutupsal koordinatlarda $r_1 = f(\theta)$, $r_2 = g(\theta)$ $(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)$ sürekli fonksiyonları verilsin. $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ özelliğindeki her θ için $r_1 = f(\theta) \leq g(\theta) = r_2$ ise $\theta = \theta_1$ ve $\theta = \theta_2$ doğruları ve r_1, r_2 fonksiyonları ile sınırlı bölgenin alanı

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} (g(\theta))^2 \,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} (f(\theta))^2 \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left((g(\theta))^2 - (f(\theta))^2\right) \mathrm{d}\theta$$

olur. Şekil ? ya bakınız.

Örnek 3

- ⋆ $r=\sin(3\theta)$ gülünün sınırladığı alanı bulalım. Şekil ? ye bakınız.
- ⋆ Sekilde de görüldüğü gibi istenilen alan birbirine eşit A_1, A_2 ve A_3 alanlarının toplamıdır. O halde önce r nin grafiği $\theta=0$ ve $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ doğruları arasında kalan alanı hesaplayalım.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(3\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1-\cos(6\theta))\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos(6\theta))\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(6\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{4}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{24}\sin(6\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{3} - \frac{1}{24}\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{24}\sin(2\pi) = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

olur. Böylece $A=3A_1=\dfrac{3\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}$ olur. ✍

Kutupsal Ko . . .
Örnek 1
Örnek 2
Kutupsal Ko . . .
Örnek 3
Örnek 4

Örnek 4

⋆ $r_1=2$ ve $r_2=1+\cos\theta$ ve eğrileri arasında kalan alanı bulalım. Şekil ?? ye bakınız.

⋆ Sekilde görüldüğü gibi istenilen alan iki eşit A_1 ve A_2 alanlarının toplamıdır. O halde önce $r_1=2$, $r_2=1+\cos\theta$ fonksiyonlarının grafikleri ve $\theta=0$, $\theta=\pi$ doğruları arasında kalan A_1 alanını bulalım. $\theta\in[0,\pi]$ için $r_1=2\geq 1+\cos\theta=r_2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left((f_1(\theta))^2-(f_2(\theta))^2\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(2^2-(1+\cos\theta)^2\right)d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(4-\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(4-\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right)d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{5}{2}-2\cos\theta-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\theta-2\sin\theta-\frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\frac{5}{2}\pi=\frac{5\pi}{4}
\end{aligned}$$

olur. Buna göre $A=2A_1=2\dfrac{5\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{2}$ olur.✍