Ödev soruları ① Çözümleri

① a) (Yanlış) örneğin; $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ bir grup o.ü $\mathbb{R}^*$ kümesi üzerinde

$a \odot b = \frac{ab}{3}$ işlemi tanımlanırsa $(\mathbb{R}^*, \odot)$ da bir grup olur

b) (Yanlış) $(\mathbb{Z}_3, +)$ grubu için $H = \{[0]_3, [1]_3\} \subseteq \mathbb{Z}_3$ olup

H bir alt grup değildir. Çünkü $[1]_3 + [1]_3 = [2]_3 \notin H$ tir

c) (Yanlış) $\mathbb{Q}^+$ bir çarpımsal grup ve $\mathbb{R}$ bir toplamsal grup old. dan

$\mathbb{Q}^+ \not\leq \mathbb{R}$ dir.

d) (Yanlış) G bir grup $a, x, y \in G$ o.ü $ax = ay \Rightarrow x = y$ ve $xa = ya \Rightarrow x = y$

dir. Çünkü

$ax = ay \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay)$ ve $xa = ya \Rightarrow (xa)a^{-1} = (ya)a^{-1}$

$\Rightarrow (a^{-1}a)x = (a^{-1}a)y$ $\qquad \Rightarrow x(aa^{-1}) = y(aa^{-1})$

$\Rightarrow ex = ey$ $\qquad \Rightarrow xe = ye$

$\Rightarrow x = y$ $\qquad \Rightarrow x = y$ olur.

e) (Yanlış) $\{\pm 1\}$ kümesi çarpımsal grup olup toplamsal grup

değildir. Çünkü $-1+1 = 0 \notin \{\pm 1\}$ dir.

f) (Doğru) G bir grup o.ü

$M(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G$ için $gx = xg\}$ kümesi G nin bir

alt grubudur. Çünkü $M(G) \subseteq G$ o.ü

$\forall x, y \in M(G)$ için $xy^{-1} \in M(G)$ dir. (?)

$x \in M(G) \Rightarrow \forall g \in G$ için $xg = gx$

$y \in M(G) \Rightarrow \forall g \in G$ için $yg = gx$ olup $xy^{-1} \in M(G)$ olması için

$\forall g \in G$ için $(xy^{-1})g = g(xy^{-1})$ olmalıdır.

$(xy^{-1})g = x(y^{-1}g)$

$= x(gy^{-1}) = (xg)y^{-1} = (gx)y^{-1} = g(xy^{-1})$ dir.

Böylece $M(G) \leq G$ olup $M(G)$ bir gruptur

g) Yarı doğru yarı yanlış

Her abelyan grup devirlidir (yanlış) örneğin; $(\mathbb{Q},+)$ bir abelyan grup olup devirli değildir. Çünkü eğer devirli olsaydı $\mathbb{Q} = \langle q \rangle$ ol. şek. $q \in \mathbb{Q}$ olup $\mathbb{Q}$ nun her elemanı

$$\mathbb{Q} = \langle q \rangle = \{ rq : r \in \mathbb{Z} \} = \{ r \frac{m}{n} : m,n,r \in \mathbb{Z} \}$$ biçiminde

yazılırdı. Fakat $\frac{1}{2n} \in \mathbb{Q}$ o.ü $\frac{1}{2n} = r\frac{m}{n} \Rightarrow 1-2rm = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$ veya $m = \frac{1}{2}$ olur. Bu ise $m,n \in \mathbb{Z}$ olması ile çelişir. O halde $(\mathbb{Q},+)$ devirli grup değildir.

Her devirli grup abelyandır (Doğru)

G bir grup ve $x \in G$ o.ü $H = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ olsun. Bu durumda

$\forall a,b \in H$ için $a.b = b.a$ (?)

$a \in H \Rightarrow a = x^n, n \in \mathbb{Z}$

$b \in H \Rightarrow b = x^m, m \in \mathbb{Z}$ olup

$$\begin{aligned} a.b &= x^n . x^m \\ &= x^{n+m} \\ &= x^{m+n} \quad (\because m,n \in \mathbb{Z}) \\ &= x^m x^n = b.a \text{ dır.} \end{aligned}$$

O halde H bir abelyan gruptur.

h) (Yanlış) $(\mathbb{Q},+)$ devirli bir grup değildir.

i) (Doğru) $\mathbb{Z}$ nin her alt grubu devirli old. dan $H \leq \mathbb{Z}$ o.ü $H = n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{Z})$ olur. Böylece her pozitif n tamsayısı için n. mertebeden bir devirli alt grup mutlaka vardır

j) (Doğru) $H = \langle x \rangle$ olmak üzere H nin her elemanı yeni bir alt grup üretir. Dolayısıyla H nin her elemanı bir üreteçtir. Burada her elemanının kendisi için üreteç olduğunu söyleyemeyiz

k) (Doğru) G bir grup ve $x \in G$ o.ü $H = \langle x \rangle \leq G$ elde edilir

şöyle ki; $x \in H$ için $H \leq G$ o.ü

$$x \cdot x = x^2 \in H \quad (\because H \leq G)$$
$$x^2 \cdot x = x^3 \in H$$
$$\vdots$$

$x^n \in H$ olup $H = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ elde edilir. Açıkça

$H \leq G$ dir. Çünkü $\forall a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ (?)

$$a \in H \Rightarrow a = x^n \ (n \in \mathbb{Z})$$
$$b \in H \Rightarrow b = x^m \ (m \in \mathbb{Z}) \quad \text{olup} \quad ab^{-1} = x^n (x^m)^{-1} = x^n x^{-m} = x^{n-m}$$

ve $n-m \in \mathbb{Z}$ old. dan $ab^{-1} \in H$ tır. Böylece $H = \langle x \rangle \leq G$ olur.

l) G bir grup ve $|G| = p \sim$ asal olsun. Bu durumda $e \neq x \in G$ o.ü $H = \langle x \rangle$ ise

G nin x elemanı tarafından üretilen alt grubu

$|H| = m$ için $m \mid p$ olur. Buradan $m = 1$ veya $m = p$ olur.

$p \geq 2$ ve $H = \langle x \rangle$ old. dan $m = 1$ olamaz. O halde $m = p$ olup

$H \subseteq G$, $|H| = |G|$ old. dan $H = G$ elde edilir. Yani G devirlidir

(2) i) $\mathbb{Z}_T = \{\ldots -3, -1, 1, 3, \ldots\}$ o.ü $1 + 3 = 4 \notin \mathbb{Z}_T$ old. dan $(\mathbb{Z}_T, +)$

bir grup değildir.

ii) $a = 0$ ve $b = 3$ için $a * b = 0 * 3 = -3 + 2 = -1 \notin (\mathbb{Q} \setminus \{-1\})$ O halde $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$

old. dan işlem ikili işlem değildir.

bir grup olamaz

iii) $\forall a, b \in (\mathbb{R} \setminus \{-1\})$ için $a * b = a + b - ab \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ olup işlem

ikili işlemdir.

G1) $\forall a, b, c \in (\mathbb{R} \setminus \{-1\})$ için

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c - bc) \\ &= a + b + c - bc - a(b + c - bc) \\ &= a + b + c - bc - ab - ac + abc \end{aligned}$$

$(a*b)*c=(a+b-ab)*c$

$= a+b-ab+c-(a+b-ab)c$

$= a+b+c-ab-ac-bc+abc$ olup $a*(b*c)=(a*b)*c$ olur.

Böylece G1 aksiyomu sağlanır

G2) $\forall a\in(\mathbb{R}\setminus\{-1\})$ için $a*e=a=e*a$ olacak $e\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ var mıdır?

$a*e=a \Rightarrow (a+e-ae)=a$

$\Rightarrow e(1-a)=0$

$\Rightarrow e=0\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$e*a=a \Rightarrow (e+a-ea)=a$

$\Rightarrow e(1-a)=0$

$\Rightarrow e=0\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ olur

G3) $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ için $a*\bar{a}^1=e=\bar{a}^1*a$ olacak $\bar{a}^1\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ var mıdır?

$a*\bar{a}^1=e=0 \Rightarrow a+\bar{a}^1-a\bar{a}^1=0$

$\Rightarrow \bar{a}^1(1-a)=-a$

$\Rightarrow \bar{a}^1=\dfrac{-a}{1-a}$ olup $a=1$ için $\bar{a}^1\notin\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ olduğundan

G3 aks sağlanmaz. O halde $(\mathbb{R}\setminus\{-1\},*)$ bir grup değildir

iv) $(\{\pm1\},\cdot)$ bir gruptur ✓

v) $A=\{2^m : m\in\mathbb{Z}\}$ o.ü $(A,\cdot)$ bir gruptur ✓

vi) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa' & 0 \\ \underbrace{ba'+cb'}_{\in\mathbb{R}} & cc' \end{pmatrix}\in\mathcal{B}$ $\quad$ $a\neq0,\ c\neq0$, $a'\neq0,\ c'\neq0$ $>$ $aa'\neq0$, $cc'\neq0$

olup işlem ikili işlemdir.

G1) $\mathcal{B}\subseteq Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ olup $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ de G1 aks. sağlandığından

$\mathcal{B}$ içinde sağlanır.

G2) $\forall A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\in\mathcal{B}$ için $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} aa' & ab' \\ ba'+cc' & bb'+cd' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow$ $aa'=a \Rightarrow a'=1$, $ab'=0 \Rightarrow b'=0$ $\quad$ $ba'+cc'=b \Rightarrow cc'=0 \Rightarrow c'=0$, $cd'=d' \Rightarrow d'=1$

$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$ olup G2 aksiyomu sağlanır

G3) ✓

③ $\forall f,g \in M(\mathbb{R})$ için $f+g \in M(\mathbb{R})$ olup işlem ikili işlemdir.

G1) $\forall f,g,h \in M(\mathbb{R})$ için $f+(g+h) = (f+g)+h$ (?)

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $(f+(g+h))(x) = ((f+g)+h)(x)$ (?)

$$(f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x)$$
$$= f(x) + (g(x)+h(x))$$
$$= (f(x)+g(x))+h(x) \quad (\because (\mathbb{R},+) \text{ bir grup})$$
$$= ((f+g)(x)+h(x))$$
$$= ((f+g)+h)(x) \Rightarrow f+(g+h) = (f+g)+h \text{ tir}$$

G2) $\forall f \in M(\mathbb{R})$ için $f+I = f = I+f$ olacak $I \in M(\mathbb{R})$ var mıdır?

$$I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto I(x) = 0 \text{ alınırsa}$$

$$(f+I)(x) = f(x) + I(x)$$
$$= f(x)+0$$
$$= f(x) \Rightarrow f+I = f \text{ ve}$$

$$(I+f)(x) = I(x)+f(x)$$
$$= 0+f(x)$$
$$= f(x) \Rightarrow I+f = f$$

olur. Böylece $I \in M(\mathbb{R})$ old. dan G2 aksiyomu sağlanır

G3) $\forall f \in M(\mathbb{R})$ için $f+g = I = g+f$ olacak $g \in M(\mathbb{R})$ var mıdır?

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = -f(x) \text{ alınırsa}$$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$= f(x) + (-f(x))$$
$$= 0 = I(x)$$

$\Rightarrow f+g = I$ ve benzer şekilde $g+f = I$ olup G3 aksiyomu sağlanır

Böylece $(M(\mathbb{R}),+)$ bir gruptur.

(4) $\forall f_{a,b}, f_{c,d} \in G$ için $f_{a,b} \circ f_{c,d} \in G$ (?)

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $(f_{a,b} \circ f_{c,d})(x) = f_{a,b}(f_{c,d}(x))$

$$= f_{a,b}(cx+d)$$

$$= a(cx+d)+b$$

$$= (ac)x+ad+b = f_{ac,ad+b}(x)$$

$\Rightarrow f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,ad+b}$ olup $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ için $ac, ad+b \in \mathbb{R}$ old. dan

$f_{a,b} \circ f_{c,d} \in G$ olur. Yani işlem ikili işlemdir.

G1) $\forall f_{a,b}, f_{c,d}, f_{e,g} \in G$ için

$$f_{a,b} \circ (f_{c,d} \circ f_{e,g}) = f_{a,b} \circ (f_{ce,\, cg+d})$$

$$= f_{a(ce),\, a(cg+d)+b}$$

$$= f_{(ac)e,\, (ac)g+ad+b}$$

$$= f_{ac,ad+b} \circ f_{e,g}$$

$$= (f_{a,b} \circ f_{c,d}) \circ f_{e,g} \text{ dir}$$

G2) $\forall f_{a,b} \in G$ için $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{a,b} = f_{c,d} \circ f_{a,b}$ olacak $f_{c,d} \in G$ var mıdır?

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{a,b} \Rightarrow f_{ac,ad+b} = f_{a,b}$$

$$\Rightarrow ac = a,\ ad+b = b$$

$$\Rightarrow c = 1,\ d = 0 \text{ ve}$$

$f_{c,d} \circ f_{a,b} = f_{a,b} \Rightarrow c=1, d=0$ olup $f_{1,0} \in G$ old. dan

G2 aks. sağlanır.

G3) $\forall f_{a,b} \in G$ için $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{1,0} = f_{c,d} \circ f_{a,b}$ olacak $f_{c,d} \in G$ var mıdır?

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{1,0} \Rightarrow f_{ac,ad+b} = f_{1,0}$$

$$\Rightarrow ac = 1,\ ad+b = 0$$

$$\Rightarrow c = 1/a,\ d = -\frac{b}{a} \text{ olup } f_{c,d} = f_{1/a,\, -\frac{b}{a}}\ (a \neq 0) \in G$$

old. dan G3 aks. sağlanır.

⑤ $H \subseteq G$ o.ü $\forall x,y \in H$ için $xy^{-1} \in H$ old. gösteremeliyiz

$x \in H \to x \in G,\ x^{-1}gx = g$

$y \in H \to y \in G,\ y^{-1}gy = g$ olup $xy^{-1} \in H$ olması için $xy^{-1} \in A$ ve

$(xy^{-1})^{-1} g (xy^{-1}) = g$ olmalıdır

$x,y \in G$ ve G bir grup old. dan $xy^{-1} \in G$ old. açıktır.

$$(xy^{-1})^{-1} g (xy^{-1}) = (yx^{-1}) g (xy^{-1})$$
$$= y(x^{-1}gx)y^{-1}$$
$$= ygy^{-1}$$
$$= g \quad (\because y^{-1}gy = g \Rightarrow y(y^{-1}gy)y^{-1} = ygy^{-1} \Rightarrow g = ygy^{-1})$$

olup $xy^{-1} \in H$ tir

⑥ $S = \{f_a : a \in \mathbb{R}\}$ o.ü $\forall f_a, f_b \in S$ için $f_a \circ f_b \in S$ (?)

$\forall (x,y) \in X$ için $(f_a \circ f_b)(x,y) = f_a(f_b(x,y))$
$$= f_a(x-by, y)$$
$$= (x-by-ay, y) = (x-(a+b)y, y)$$
$$= f_{a+b}(x,y)$$

olup $a+b \in \mathbb{R}$ old. dan $f_a \circ f_b = f_{a+b} \in S$ dir. O halde işlem ikili işlemdir

G1) $\forall f_a, f_b, f_c \in S$ için $f_a \circ (f_b \circ f_c) = (f_a \circ f_{b+c})$
$$= f_{a+(b+c)} = f_{(a+b)+c}$$
$$= f_{a+b} \circ f_c$$
$$= (f_a \circ f_b) \circ f_c$$ olup G1 aks. sağlanır.

G2) $\forall f_a \in S$ için $e = f_0$ alınırsa $f_a \circ f_0 = f_{a+0} = f_a = f_{0+a} = f_0 \circ f_a$

olup $f_0 \in S$ old. dan G2 aks. sağlanır.

G3) $\forall f_a \in S$ için $f_a^{-1} = f_{-a}$ alınırsa $f_a \circ f_a^{-1} = f_a \circ f_{-a} = f_{a+(-a)} = f_0$

ve $f_a^{-1} \circ f_a = f_0$ olup G3 aks. sağlanır.

8

(7) $G_1 = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$

$G_2 = \mathbb{Q}$ ~ devirli değil

$G_3 = \langle 6 \rangle = \langle 6^{-1} \rangle$

$G_4 = \mathbb{Q}^+$ ~ devirli değil (Eğer devirli olsaydı her alt grubu devirli olurdu. Fakat $(\{\pm 1\}, \cdot) \leq \mathbb{Q}^+$ olup devirli değildir)

$G_5 = 6\mathbb{Z} = \langle 6 \rangle = \langle -6 \rangle$ ($\mathbb{Z}$ nin her alt grubu devirli)

$G_6 = \{a+b\sqrt{2} : a,b \in \mathbb{Z}\}$ ~ devirli değil. Eğer $G = \langle a+b\sqrt{2} \rangle$ olsaydı $b+2a\sqrt{2} = n(a+b\sqrt{2})$ biçiminde yazılırdı. Fakat

$b+2a\sqrt{2} = na+(nb)\sqrt{2} \Rightarrow b=na,\ 2a=nb$
$\Rightarrow 2a = n(na)$
$\Rightarrow n^2 = 2 \Rightarrow n = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ olur. Bu

ise çelişkidir.

(8) $\underline{\underline{1:1}}$ $T_x(g_1) = T_x(g_2) \Rightarrow g_1 x = g_2 x$
$\Rightarrow (g_1 x)x^{-1} = (g_2 x)x^{-1}$
$\Rightarrow g_1(xx^{-1}) = g_2(xx^{-1})$
$\Rightarrow g_1 e = g_2 e \Rightarrow g_1 = g_2 \Rightarrow T_x$ 1:1

$\underline{\underline{\text{örten}}}$ $\forall g' \in G$ için $\exists g = g'x^{-1} \in G \ni$
$T_x(g) = T_x(g'x^{-1}) = g'x^{-1}x = g'$ olup T_x örtendir.

Böylece T_x bir permütasyon olup $(R,\circ)$ bir gruptur.

(9) $\forall a,b \in G$ için $a * b = \frac{a+b}{1+ab} \in G$ (?)

$a \in G \Rightarrow a \in \mathbb{R}, -1 < a < 1 \Rightarrow |a| < 1$

$b \in G \Rightarrow b \in \mathbb{R}, -1 < b < 1 \Rightarrow |b| < 1$ olup $a * b = \frac{a+b}{1+ab} \in G$ olması

için $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1$ olmalıdır.

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| = \frac{|a+b|}{|1+ab|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a||b|} = \frac{|a|}{1+|a||b|} + \frac{|b|}{1+|a||b|} < \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = 1$$

old. dan $a * b \in G$ dir. Yani işlem ikili işlemdir.

G1) $\forall a,b,c \in G$ için $a*(b*c) = a * \left(\frac{b+c}{1+bc}\right) = \frac{a + \frac{b+c}{1+bc}}{1 + a\left(\frac{b+c}{1+bc}\right)} = \frac{a(1+bc)+b+c}{1+bc+a(b+c)}$

$$= \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$$

$$(a*b)*c = \left(\frac{a+b}{1+ab}\right) * c = \frac{\frac{a+b}{1+ab}+c}{1+\frac{a+b}{1+ab}c} = \frac{a+b+c(1+ab)}{(1+ab)+ca+cb} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$$

olup G1 aks. sağlanır.

G2) $\forall a \in G$ için $a * e = a = e * a$ ol. şek. $e \in G$ var mıdır?

$a * e = a \Rightarrow \frac{a+e}{1+ae} = a$ ve $e * a = a \Rightarrow \frac{e+a}{1+ea} = a$

$\Rightarrow a + e = a + a^2 e$ $\quad\quad \Rightarrow e + a = a + ea^2$

$\Rightarrow e(1-a^2) = 0$ $\quad\quad \Rightarrow e(1-a^2) = 0$

$\Rightarrow e = 0 \in G$ $\quad\quad \Rightarrow e = 0 \in G$

G3) $\forall a \in G$ için $a * b = e = b * a$ ol. şek. $b \in G$ var mıdır?

$a * b = e \Rightarrow \frac{a+b}{1+ab} = 0$

$\Rightarrow b = -a$ olup $-1 < a < 1 \Rightarrow -1 < -a < 1 \Rightarrow -1 < b < 1$

old. dan $b \in G$ dir.

(10) $1 * e = 1 \Rightarrow \max\{1, e\} = 1$

$\Rightarrow e < 1$ olur. Dolayısıyla e tek değildir

Örneğin; $1 * e = 1 \Rightarrow e = 0$ alınabilir fakat

$-1 * e = -1 \Rightarrow e = 0$ olamaz

O halde $(\mathbb{Z}, *)$ bir grup değildir.

(11) ~~G dört elemanlı bir grup olsun. Bu durumda $G = \{e, a, b, c\}$ olur. Burada G bir grup old. dan $e \neq a$, $e \neq b$, $a \neq b$ olup $ab \in G$ dir. Eğer $ab = a \Rightarrow b = e$ olup çelişki elde edilir. Eğer $ab = b \Rightarrow a = e$ olup çelişki elde edilir. Eğer $ab = e$ ise bu G nin 4 elemanlı olmasıyla çelişir. O halde $c = ab$ olur. Benzer şekilde $c = ba$ olup $ab = ba$ elde edilir. Ayrıca bu grup için her elemanın tersi kendisidir~~

ab veya ba

(12) $\forall f, g \in G^X$ için $f \cdot g \in G^X$ olup işlem ikili işlemdir.

G1) $\forall f, g, h \in G^X$ için $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$ (?)

$\forall x \in X$ için $(f \cdot (g \cdot h))(x) = f(x)\,(g \cdot h)(x)$

$= f(x)\,(g(x)\,h(x))$

$= (f(x)\,g(x))\,h(x)$ ($\because$ G bir grup)

$= (f \cdot g)(x)\,h(x)$

$= ((f \cdot g) \cdot h)(x) \Rightarrow f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$ tır.

G2) $\forall f \in G^X$ için $I : X \longrightarrow G$

$x \longmapsto I(x) = e_G$ olarak alınırsa

$(f \cdot I)(x) = f(x)\,I(x)$

$= f(x)\,e_G$

$= f(x) \Rightarrow f \cdot I = f$ ve $I f = f$ olur. Ayrıca $I \in G^X$

old. dan G2 akı. sağlanır.

G3) $\forall f \in G^X$ için $g: X \to G$
$x \mapsto g(x) = (f(x))^{-1}$ olarak tanımlanırsa

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= f(x)(f(x))^{-1}$$
$$= e_G = I(x) \Rightarrow f \cdot g = I \text{ ve } g \cdot f = I \text{ olup G3 aksiyomu sağlanır.}$$

Böylece $(G^X, \cdot)$ bir gruptur.

(12) G abelyan $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in G$ için $(ab)^2 = a^2b^2$ (?)

($\Rightarrow$) G abelyan olsun. Bu durumda

$$(ab)^2 = (ab)(ab)$$
$$= a(ba)b = a(ab)b = a^2b^2 \text{ olur.}$$

($\Leftarrow$) $(ab)^2 = a^2b^2$ olsun.

$$(ab)^2 = a^2b^2 \Rightarrow (ab)(ab) = aabb$$
$$\Rightarrow a^{-1}(ab)(ab)b^{-1} = a^{-1}aabbb^{-1}$$
$$\Rightarrow a^{-1}a(ba)bb^{-1} = a^{-1}a(ab)bb^{-1}$$
$$\Rightarrow ba = ab \text{ olup G abelyandır}$$

(14) G bir grup olsun.

$k=1$ için $(a^{-1}ba) = a^{-1}ba$ olup açıktır

$k=n$ için $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^na$ iken $k=n+1$ için $(a^{-1}ba)^{n+1} = a^{-1}b^{n+1}a$

olmalıdır.

$$(a^{-1}ba)^{n+1} = (a^{-1}ba)^n(a^{-1}ba)$$
$$= (a^{-1}b^na)a^{-1}ba \quad (\because \text{Hipotez})$$
$$= a^{-1}b^n(aa^{-1})ba$$
$$= a^{-1}b^{n+1}a \quad \text{olur.}$$

(13) $\forall \theta_a, \theta_b \in H$ için

$$(\theta_a \circ \theta_b)(x) = \theta_a(\theta_b(x))$$
$$= \theta_a(b+x)$$
$$= a+(b+x)$$
$$= (a+b)+x$$
$$= \theta_{a+b}(x) \quad \text{olup} \quad \theta_a \circ \theta_b = \theta_{a+b} \text{ dir.}$$

Yani $\theta_a \circ \theta_b \in H$ olup işlem kapalıdır.

(G1) $\forall \theta_a, \theta_b, \theta_c \in H$ için

$$\theta_a \circ (\theta_b \circ \theta_c) = \theta_a \circ \theta_{b+c}$$
$$= \theta_{a+(b+c)}$$
$$= \theta_{(a+b)+c}$$
$$= (\theta_{a+b}) \circ \theta_c = (\theta_a \circ \theta_b) \circ \theta_c \text{ dir.}$$

(G2) $\forall \theta_a \in H$ için

$$\theta_a \circ \theta_e = \theta_a = \theta_e \circ \theta_a \text{ olacak } \theta_e \in H \text{ var mıdır?}$$

$$\theta_a \circ \theta_e = \theta_a \Rightarrow \theta_{a+e} = \theta_a$$
$$\Rightarrow a+e = a$$
$$\Rightarrow e = 0 \in \mathbb{Z} \text{ olup } \theta_e = \theta_0 \text{ dır.} \left(\theta_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 0+x = x \right)$$

Benzer şekilde $\theta_e \circ \theta_a = \theta_a \Rightarrow \theta_e = \theta_0$ dır.

(G3) $\forall \theta_a \in H$ için

$$\theta_a \circ \theta_b = \theta_e = \theta_b \circ \theta_a \text{ olacak } \theta_b \in H \text{ var mıdır?}$$

$$\theta_a \circ \theta_b = \theta_e \Rightarrow \theta_{a+b} = \theta_0$$
$$\Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow b = -a \text{ olup } \theta_b = \theta_{-a} \text{ dır.}$$

Benzer şekilde $\theta_b \circ \theta_a = \theta_e \Rightarrow \theta_b = \theta_{-a}$ dır.

Dolayısıyla H bir gruptur.

(G4) $\forall \theta_g, \theta_h \in H$ için $\theta_g \circ \theta_h \overset{?}{\in} H$

$$(\theta_g \circ \theta_h)(x) = \theta_g(\theta_h(x))$$
$$= \theta_g(hxh^{-1})$$
$$= g(hxh^{-1})g^{-1}$$
$$= (gh)x(gh)^{-1} = \theta_{gh}(x) \Rightarrow \theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh} \text{ tır}$$

Yani $\theta_g \circ \theta_h \in H$ olup işlem kapalıdır.

(G1) $\forall \theta_g, \theta_h, \theta_k \in H$ için

$$\theta_g \circ (\theta_h \circ \theta_k) = \theta_g \circ (\theta_{hk})$$
$$= \theta_{g(hk)} = \theta_{(gh)k}$$
$$= \theta_{gh} \circ \theta_k = (\theta_g \circ \theta_h) \circ \theta_k \text{ dır.}$$

(G2) $\forall \theta_g \in H$ için $\theta_g \circ \theta_e = \theta_g = \theta_e \circ \theta_g$ olacak $\theta_e \in H$ var mıdır?

$$\theta_g \circ \theta_e = \theta_g \Rightarrow \theta_{ge} = \theta_g$$
$$\Rightarrow ge = g$$
$$\Rightarrow e = e_G \in G \text{ olup } \theta_e = \theta_{e_G} \in H \text{ 'tır.}$$

Benzer şekilde

$$\theta_e \circ \theta_g = \theta_g \Rightarrow \theta_e = \theta_{e_G} \text{ dır.}$$

(G3) $\forall \theta_g \in H$ için $\theta_g \circ \theta_h = \theta_e = \theta_h \circ \theta_g$ olacak $\theta_h \in H$ var mıdır?

$$\theta_g \circ \theta_h = \theta_e = \theta_{e_G} \Rightarrow \theta_{gh} = \theta_{e_G}$$
$$\Rightarrow gh = e_G$$
$$\Rightarrow h = g^{-1} \in G \text{ olup } \theta_h = \theta_{g^{-1}} \in H \text{ tır.}$$

Böylece H bir grup belirtir.