Ödev Soruları (2) Çözümleri

(1) G Abelyen grup olsun.

$H \leq G \iff \forall x,y \in H$ için $xy^{-1} \overset{?}{\in} H$

$x \in H \Rightarrow x \in G,\ x^2 = e$

$y \in H \Rightarrow y \in G,\ y^2 = e$ olup

$xy^{-1} \in H \iff xy^{-1} \in G,\ (xy^{-1})^2 = e$ olmalıdır.

$x,y \in G$ ve G grup old.dan $xy^{-1} \in G$ dir.

$(xy^{-1})^2 = x^2 (y^{-1})^2$ ($\because G$ Abelyen)

$= e (y^2)^{-1} = e e^{-1} = e$ olup $xy^{-1} \in H$ 'tır. Yani $H \leq G$ dir.

(2) $H \leq G \iff$ (i) $\forall p,q \in H$ için $pq \overset{?}{\in} H$

(ii) $\forall p \in H$ için $p^{-1} \overset{?}{\in} H$

(i) $p \in H \Rightarrow p \in G,\ \forall x \in G$ için $f(xp) = f(x)$

$q \in H \Rightarrow q \in G,\ \forall x \in G$ için $f(xq) = f(x)$ olup

$f(xpq) = f(xp)$ ($\because q \in H$)

$= f(x)$ ($\because p \in H$) old.dan $pq \in H$ 'tır.

(ii) $f(x) = f(xp^{-1}p) = f(xp^{-1})$ ($\because p \in H$) olup $p^{-1} \in H$ 'tır.

Yani $H \leq G$ dir.

(3) $H_1 \leq G \iff \forall x,y \in H_1$ için $xy^{-1} \overset{?}{\in} H_1$

$(xy^{-1})^n = x^n (y^{-1})^n$ ($\because G$ Abelyen)

$= x^n (y^n)^{-1} = e e^{-1} = e$ olup $xy^{-1} \in H_1$ dir. Yani $H_1 \leq G$ dir

$H_2 \leq G \iff \forall x^n, y^n \in H_2$ için $x^n (y^n)^{-1} \overset{?}{\in} H_2$

$x^n (y^n)^{-1} = x^n (y^{-1})^n$

$= (x y^{-1})^n$ ($\because G$ Abelyen) olup $xy^{-1} \in G$ old.dan

$H_2 \leq G$ dir.

(4) (a) $H_1 \leq \mathbb{C}^*$ (?)

$z = x+iy$ o.ü $z^{-1} = \dfrac{1}{x+iy} \cdot \dfrac{(x-iy)}{(x-iy)} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$ olup $z^{-1} \in H_1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right) \geq$

olmalıdır. Fakat $\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right) < 0$ old.dan $z^{-1} \notin H_1$ dir.

yani $H_1 \not\leq \mathbb{C}^*$ dir.

(b) (i) $\forall z_1, z_2 \in H_2$ için $z_1 z_2 \overset{?}{\in} H_2$
(ii) $\forall z \in H$ için $z^{-1} \in H_2$ $\Big\} \Leftrightarrow H_2 \leq \mathbb{C}^*$

(i) $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ o.ü

$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$ olup

$$(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2 = x_1^2x_2^2 - \cancel{2x_1x_2y_1y_2} + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + \cancel{2x_1y_2y_1x_2} + y_1^2x_2^2$$

$$= x_1^2\underbrace{(x_2^2+y_2^2)}_{1} + y_1^2\underbrace{(y_2^2+x_2^2)}_{1} = 1$$

old.dan $z_1 z_2 \in H_2$ dir.

(ii) $z = x+iy$ o.ü $z^{-1} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$ olup

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{1} = 1$$

old.dan $z^{-1} \in H_2$ dir.

yani $H_2 \leq \mathbb{C}^*$ dir.

(5) $H \leq G \Leftrightarrow \forall A, B \in H$ için $AB^{-1} \overset{?}{\in} H$

$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix} \in H$ o.ü

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x')^{-1} & 0 \\ 0 & (y')^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x')^{-1} & 0 \\ 0 & y(y')^{-1} \end{pmatrix} \in H$$

olduğundan $H \leq G$ dir.

(6) (a) $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ (Doğru) (c) $\mathbb{Z}-\{0\} \leq \mathbb{Q}^*$ (Yanlış) ($\mathbb{Z}-\{0\}$ çarpmaya göre grup değil)

(b) $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$ (Doğru) (d) $\mathbb{Q}^* \leq \mathbb{C}^*$ (Doğru)

(7) G Abelyan grup, $H \leq G$ olsun.

$S(H) \leq G \iff \forall x,y \in S(H)$ için $xy^{-1} \overset{?}{\in} S(H)$

$x \in S(H) \Rightarrow x \in G,\ x^2 \in H$

$y \in S(H) \Rightarrow y \in G,\ y^2 \in H$ olup $xy^{-1} \in G$ ve

$$(xy^{-1})^2 = x^2 (y^{-1})^2 \ (\because G \text{ Abelyan})$$

$$= \underbrace{x^2}_{\in H} \underbrace{(y^2)^{-1}}_{\in H} \in H \ (\because H \leq G)$$ olduğundan $xy^{-1} \in S(H)$ tır.

(8) $G = S_3$ ve $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ olsun. $n=2$ için

$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = b^2$ olup $a \neq b$ dir.

(9) Üreteçler $(s,18)=1 \Rightarrow s = 1, 5, 7, 11, 13, 17$

$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \overline{11} \rangle = \langle \overline{13} \rangle = \langle \overline{17} \rangle = \mathbb{Z}_{18}$ dir.

Alt gruplar $d = 1, 2, 3, 6, 9, 18$

$H_1 = \langle \frac{18}{1} \bar{1} \rangle = \langle \overline{18} \rangle = \{\bar{0}\}$

$H_2 = \langle \frac{18}{2} \bar{1} \rangle = \langle \bar{9} \rangle = \{\bar{0}, \bar{9}\}$

$H_3 = \langle \frac{18}{3} \bar{1} \rangle = \langle \bar{6} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}\}$

$H_4 = \langle \frac{18}{6} \bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$

$H_5 = \langle \frac{18}{9} \bar{1} \rangle = \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}$

$H_6 = \langle \frac{18}{18} \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_{18}$ dir.

10

$$A=\left\{ I = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\langle I \rangle = I = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} \right\}$$
$$= A$$

olduğundan A devirlidir.

11 $G=\langle g \rangle$, $|G|=28$ $\qquad \phi(28)=\phi(7\cdot 2^2)=(7-1)(2^2-2^1)=6\cdot 2=12$

<u>Üreteçler</u> $(s,28)=1 \Rightarrow s=1,3,5,9,11,13,15,17,19,23,25,27$

$$\langle g \rangle = \langle g^3 \rangle = \langle g^5 \rangle = \langle g^9 \rangle = \langle g^{11} \rangle = \langle g^{13} \rangle = \langle g^{15} \rangle = \langle g^{17} \rangle = \langle g^{19} \rangle$$
$$= \langle g^{23} \rangle = \langle g^{25} \rangle = \langle g^{27} \rangle = G$$

<u>Alt Gruplar</u> $d=1,2,4,7,14,28$

$H_1 = \langle g^{\frac{28}{1}} \rangle = \langle g^{28} \rangle = \{e\}$

$H_2 = \langle g^{\frac{28}{2}} \rangle = \langle g^{14} \rangle = \{e, g^{14}\}$

$H_3 = \langle g^{\frac{28}{4}} \rangle = \langle g^{7} \rangle = \{e, g^7, g^{14}\}$

$H_4 = \langle g^{\frac{28}{7}} \rangle = \langle g^{4} \rangle = \{e, g^4, g^8, g^{12}, g^{16}, g^{20}, g^{24}\}$

$H_5 = \langle g^{\frac{28}{14}} \rangle = \langle g^{2} \rangle = \{e, g^2, g^4, \dots, g^{26}\}$

$H_6 = \langle g^{\frac{28}{28}} \rangle = \langle g \rangle = G$ dir.

(13) $\langle A\rangle = \langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\langle B\rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ dır.

(14) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow m(A) = 2$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow m(B) = 2$ olup

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. $(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

olacak $n \in \mathbb{Z}^+$ olmadığından $m(AB) = \infty$ dır.

(15) G grup, $x \in G$ olsun. $H = \langle x \rangle$ o.ü $x \in U \subseteq H$ olacak $U \leq G$ olsun.

Bu durumda $x \in U \Rightarrow x^2 \in U$

$x^3 \in U$
$\vdots$ olup $x^n \in U$ olur. Yani $H \subseteq U$

elde edilir. Yani $U \subseteq H$ ve $H \subseteq U$ old.dan $U = H$ tır. Dolayısıyla

H, G nin x'i içeren en küçük alt grubudur.

(17) $m(a) = n \Rightarrow a^n = e$ olacak $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$m(a^{-1}) = k$ diyelim $k = n$ old. gösterelim.

$m(a^{-1}) = k \Rightarrow (a^{-1})^k = e \Rightarrow (a^k)^{-1} = e \Rightarrow a^k = e \Rightarrow n | k$

$a^n = e \Rightarrow (a^n)^{-1} = e \Rightarrow (a^{-1})^n = e \Rightarrow k | n$

olup $k = n$ dir.

(18) $P_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \} = \langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle$ dır. Yani P_n devirlidir.

(19) $P_4 = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1 \} = \{ 1, i, -i, -1 \}$ olup

$\langle i \rangle = \langle -i \rangle = P_4$ tür.

(20) $H = 4\mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Z}$ o.ü $x \in \mathbb{Z}$ için

$H + x = 4\mathbb{Z} + x = \{ 4k + x \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{ 4\mathbb{Z}+0, 4\mathbb{Z}+1, 4\mathbb{Z}+2, 4\mathbb{Z}+3 \}$

biçimindedir.

$H = \langle \bar{4} \rangle$, $G = \mathbb{Z}_{12}$ o.ü $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{12}$ için

$H + \bar{x} = \underbrace{\langle \bar{4} \rangle}_{\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}} + \bar{x} = \{ \langle \bar{4} \rangle + \bar{0}, \langle \bar{4} \rangle + \bar{1}, \langle \bar{4} \rangle + \bar{2}, \langle \bar{4} \rangle + \bar{3} \}$

biçimindedir.

$H = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{R}$ o.ü $x \in \mathbb{R}$ için

$H + x = \mathbb{Z} + x = \{ n + x \mid n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \}$ biçimindedir.

(21) $m(g) = n$ o.ü $n, m \in \mathbb{Z}$ için $m = nt + k$, $0 \leq k < m$ olacak. $k, t \in \mathbb{Z}$ vardır.

$m(g) = n \Rightarrow g^n = e$ olacak en küçük pozitif tamsayı n

olup

$g^m = e \Rightarrow g^{nt+k} = e$

$\Rightarrow (g^n)^t g^k = e$

$\Rightarrow g^k = e \Rightarrow k = 0$ dır. Yani $m = nt$ olup $n \mid m$ dır.

(22) $|\mathbb{Z}_{24}|=24$ o.ü

üreteler $(s,24)=1 \Rightarrow s=1,5,7,11,13,17,19,23$

$\langle\bar{1}\rangle=\langle\bar{5}\rangle=\langle\bar{7}\rangle=\langle\bar{11}\rangle=\langle\bar{13}\rangle=\langle\bar{17}\rangle=\langle\bar{19}\rangle=\langle\bar{23}\rangle=\mathbb{Z}_{24}$

Alt gruplar $\quad d=1,2,3,4,6,8,12,24$

$H_1=\langle \frac{24}{1}\bar{1}\rangle=\langle\bar{24}\rangle=\{\bar{0}\}$

$H_2=\langle \frac{24}{2}\bar{1}\rangle=\langle\bar{12}\rangle=\{\bar{0},\bar{12}\}$

$H_3=\langle \frac{24}{3}\bar{1}\rangle=\langle\bar{8}\rangle=\{\bar{0},\bar{8},\bar{16}\}$

$H_4=\langle \frac{24}{4}\bar{1}\rangle=\langle\bar{6}\rangle$

$H_5=\langle \frac{24}{6}\bar{1}\rangle=\langle\bar{4}\rangle$ --- biçimindedir.

(24) (a) n asal olsun. $n\geq 2$ old. dan $e\neq g$ olacak $g\in G$ vardır. $H=\langle g\rangle$ dersek $m(g)=|H|=k$ o.ü Lagrange gereği $k|n$ dir. n asal old. dan $k=1$ veya $k=n$ olmalıdır. $k\neq 1$ olamaz. O halde $k=n$ olup $|H|=|G|$ olur. $H\leq G$ old. dan $H=G$ dir. Yani G devirlidir.

(b) $\mathbb{Z}_4=\langle\bar{1}\rangle$ olup $|\mathbb{Z}_4|=4$ asal değildir.