Ödev ③ Çözümleri

① $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$ (?)

(i) x, tek, y çift ise $x+y$ tek olup

$\phi(x+y) = -1 = -1 \cdot 1 = \phi(x)\phi(y)$ dir.

(ii) x,y tek ise $x+y$ çift olup

$\phi(x+y) = 1 = (-1)(-1) = \phi(x)\phi(y)$ dir.

(iii) x,y çift ise $x+y$ çift olup

$\phi(x+y) = 1 = 1 \cdot 1 = \phi(x)\phi(y)$ dir.

Dolayısıyla ϕ bir homomorfizmadır.

$Çek\,\phi = \{x \in \mathbb{Z} \mid \phi(x) = 1\}$

$= \{x \in \mathbb{Z} \mid x$ çift tamsayı$\}$

$= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$ dir.

② $f: G \to H$ izomorfizm olsun.

$m(g) = k \Rightarrow g^k = e$ olup $m(f(g)) = n$ dersek $k = n$ old. göstermeliyiz.

$g^k = e \Rightarrow f(g^k) = f(e) = e$

$\Rightarrow f(\underbrace{gg\cdots g}_{k\text{-tane}}) = e$

$\Rightarrow \underbrace{f(g)f(g)\cdots f(g)}_{k\text{-tane}} = e$ ($\because f$ homo)

$\Rightarrow (f(g))^k = e \Rightarrow n \mid k$

$(f(g))^n = e \Rightarrow \overbrace{f(g)f(g)\cdots f(g)}^{n\text{-tane}} = e$

$\Rightarrow f(\overbrace{gg\cdots g}^{n\text{-tane}}) = e = f(e)$ ($\because f$ homo)

$\Rightarrow f(g^n) = f(e)$

$\Rightarrow g^n = e$ ($\because f$ 1:1) $\Rightarrow k \mid n$ olup $k = n$ dir.

③ (i) $f: G \to H$, $g: H \to G$

$$g(h_1h_2) \overset{?}{=} g(h_1)g(h_2)$$

f örten old. dan $\overset{\text{her } h \text{ için}}{f(g)=h}$ olacak $g \in G$ olup

$$\begin{aligned} g(h_1h_2) &= g(f(g_1)f(g_2)) \\ &= g(f(g_1g_2)) \quad (\because f \text{ homo}) \\ &= (g\circ f)(g_1g_2) \\ &= (g\circ f)(g_1)(g\circ f)(g_2) \quad (\because g\circ f \text{ homo}) \\ &= g(f(g_1))\, g(f(g_2)) \\ &= g(h_1)g(h_2) \end{aligned}$$

dır. yani g homo dır.

(ii) $f(g_1g_2) \overset{?}{=} f(g_1)f(g_2)$

$\cancel{(f\circ g)(h_1h_2) = (f\circ g)(h_1)(f\circ g)(h_2) \Rightarrow f(g(h_1h_2)) = f(g(h_1))f(g(h_2))}$

$(g\circ f)(g_1g_2) = (g\circ f)(g_1)(g\circ f)(g_2)$ ($\because g\circ f$ homo.) olup

$$\begin{aligned} g(f(g_1g_2)) &= g(f(g_1))\, g(f(g_2)) \\ &= g(f(g_1)f(g_2)) \quad (\because g \text{ homo.}) \end{aligned}$$

dır. g 1:1 old.dan

$g(f(g_1g_2)) = g(f(g_1)f(g_2)) \Rightarrow f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$ olup f homo dr.

④ $(G,\circ)$ nın grup olması grup aks. sağlatılarak gösterilir. (ödev)

$f: G \to G$
$a \mapsto a^{-1}$ fonk. tanımlarsak f 1:1-örten olup

$f(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a\circ b = f(a)\circ f(b)$ old.dan f homo dr.

Dolayısıyla f izomorfizm olup $(G,\cdot) \cong (G,\circ)$ dır.

(5) $\phi(ab) \overset{?}{=} \phi(a) \circ \phi(b)$ (?)

$I_{ab} \overset{?}{=} I_a \circ I_b$

$\forall x \in G$ için $(I_a \circ I_b)(x) = I_a(I_b(x))$

$= I_a(bxb^{-1})$

$= a(bxb^{-1})a^{-1}$

$= (ab)x(ab)^{-1} = I_{ab}(x)$ olup $I_a \circ I_b = I_{ab}$

dır. yani $\phi(a) \circ \phi(b) = \phi_{ab}$ dır. Böylece ϕ homomorfizmadır.

$Gek\,\phi = \{ a \in G \mid \phi(a) = e_H \}$

$= \{ a \in G \mid I_a = I_e \}$

$= \{ a \in G \mid \forall x \in G \text{ için } I_a(x) = I_e(x) \}$

$= \{ a \in G \mid \forall x \in G \text{ için } axa^{-1} = x \} = Z(G)$ dır.

(6) $\phi(\alpha_{a,b} \circ \alpha_{c,d}) \overset{?}{=} \phi(\alpha_{a,b}) \circ \phi(\alpha_{c,d})$

$(\alpha_{a,b} \circ \alpha_{c,d})(x) = \alpha_{a,b}(\alpha_{c,d}(x))$

$= \alpha_{a,b}(cx+d)$

$= a(cx+d)+b = acx + ad + b$

$= \alpha_{ac,\,ad+b}(x) \Rightarrow \alpha_{a,b} \circ \alpha_{c,d} = \alpha_{ac,\,ad+b}$

olup $\phi(\alpha_{a,b} \circ \alpha_{c,d}) = \phi(\alpha_{ac,\,ad+b}) = \alpha_{ac,0}$ ve

$\phi(\alpha_{a,b}) \circ \phi(\alpha_{c,d}) = \alpha_{a,0} \circ \alpha_{c,0} = \alpha_{ac,0}$ old. dan

ϕ homo. dır.

$Gek\,\phi = \{ \alpha_{a,b} \mid \phi(\alpha_{a,b}) = e_G \}$

$= \{ \alpha_{a,b} \mid \alpha_{a,0} = \alpha_{1,0} \}$ (G nin birimi $\alpha_{1,0}$)

$= \{ \alpha_{a,b} \mid a=1,\ b \in \mathbb{R} \} = \{ \alpha_{1,b} \mid b \in \mathbb{R} \}$ dır.

$\phi(G) = \{ \phi(\alpha_{a,b}) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \} = \{ \alpha_{a,0} \mid a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \}$ dır.

(7) $f : G \longrightarrow G$

$x \longmapsto x^{-1}$ izomorfizm olsun.

$\forall a,b \in G$ için $ab = ba$ (?)

f örten old.dan $\forall a \in G$ için $f(x) = a$ ol-cek $x \in G$ vardır.

$$\begin{aligned} ab &= f(x)f(y) \\ &= f(xy) \quad (\because f \text{ homo.}) \\ &= (xy)^{-1} \\ &= y^{-1}x^{-1} = f(y)f(x) = ba \end{aligned}$$ olup G Abelyandır.

(8) $(S,*)$'ın grup olduğu grup aksiyomları ile gösterilir. (ödev)

$f : S \longrightarrow G$ 1:1 -örten old. dan f nin homo. olduğunu

göstermek yeterlidir.

$f(x*y) \overset{?}{=} f(x) \circ f(y)$

$x*y = f^{-1}(f(x) \circ f(y)) \Rightarrow f(x*y) = f f^{-1}(f(x) \circ f(y))$

$\Rightarrow f(x*y) = f(x) \circ f(y)$ old.dan f

homo.dur.

(10) G Abelyan olsun.

$f(G) = \{f(x) \mid x \in G\}$ o.ü.

$\forall f(x), f(y) \in f(G)$ için $f(x)f(y) = f(xy)$ ($\because f$ homo.)

$= f(yx)$ ($\because G$ Abelyan)

$= f(y)f(x)$ olup $f(G)$ Abelyandır.

$G = \langle g \rangle$ olsun

$$\begin{aligned} f(G) &= \{f(x) \mid x \in G\} \\ &= \{f(g^n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{f(\overbrace{gg\cdots g}^{n\text{-tane}}) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\overbrace{f(g)f(g)\cdots f(g)}^{n\text{-tane}} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{(f(g))^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \langle f(g) \rangle \text{ dir.} \end{aligned}$$

(11) G Abelyen grup olsun.

$$f(xy) = (xy)^n = x^n y^n = f(x)f(y) \text{ olup } f \text{ homo.dir.}$$

(12) $\phi : \mathbb{Z}_{30} \to G \qquad |G| = 5,\ G = \langle g \rangle$

$[x]_{30} \longmapsto g^x$

$$\text{Çek}\,\phi = \{ [x]_{30} \mid \phi([x]_{30}) = e_G \}$$

$$= \{ [x]_{30} \mid g^x = e_G \}$$

$$= \{ [x]_{30} \mid x = 5k,\ k \in \mathbb{Z} \} = \{ \bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25} \}$$

(13) $\phi : \mathbb{Z}_{30} \to \mathbb{Z}_{30}$ homo.

$\text{Çek}\,\phi = \{ \bar{0}, \overline{10}, \overline{20} \},\ \phi(\overline{23}) = \bar{9}$ olsun.

$$\phi(\overline{13}) = \phi(\overline{10} + \bar{3}) = \underbrace{\phi(\overline{10})}_{\bar{0}} + \phi(\bar{3}) = \phi(\bar{3})$$

$$\phi(\overline{23}) = \phi(\overline{20} + \bar{3}) = \underbrace{\phi(\overline{20})}_{\bar{0}} + \phi(\bar{3}) \Rightarrow \phi(\bar{3}) = \bar{9} \text{ ve } \phi(\overline{13}) = \bar{9} \text{ dır}$$

(14) (a) $\tau_g \in A$ (?) $\quad \tau_g : G \to G$

$x \longmapsto g x g^{-1}$

<u>1:1</u> $\tau_g(x) = \tau_g(y) \Rightarrow g x g^{-1} = g y g^{-1}$

$\Rightarrow g^{-1}(g x g^{-1}) g = g^{-1}(g y g^{-1}) g \Rightarrow x = y$ olup τ_g 1:1 dir

<u>örten</u> ~~τ_g~~ $\forall y \in G$ için $\exists x = g^{-1} y g \in G \ni \tau_g(x) = g x g^{-1} = g(g^{-1} y g) g^{-1} = y$

olup τ_g örtendir.

<u>Homo</u> $\tau_g(xy) = g(xy)g^{-1}$

$$= g x (g^{-1} g) y g^{-1} = (g x g^{-1})(g y g^{-1}) = \tau_g(x)\,\tau_g(y)$$

olup τ_g homo.dir. Böylece τ_g İzo. olup $\tau_g \in A$ dır.

(b) $\phi: G \to A$
$g \mapsto \phi(g) = \tau_g$ o.ş

$\ker\phi = \{ g\in G \mid \overset{\tau_g}{\widetilde{\phi(g)}} = e_A \}$

$= \{ g\in G \mid \forall x\in G$ için $\tau_g(x) = I(x) \}$

$= \{ g\in G \mid \forall x\in G$ için $g x g^{-1} = x \}$

$= \{ g\in G \mid \forall x\in G$ için $gx = xg \} = Z(G) =$ merk(G) dir.

(15) izomorfizm $\Rightarrow$ Homomorfizm
$\not\Leftarrow$ (Örn: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$ homo. fakat izo. değil)

$\mathbb{R}^+ \cong \mathbb{R}$ dir. Çünkü $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto a^x$ $(a>0, a\neq 1)$

fonksiyonu bir izomorfizmdir.

$\mathbb{R}^+ \ncong \mathbb{C}^*$ dir. Çünkü $\mathbb{R}^+$ da mertebesi 4 olan eleman sayısı 0 iken

$(\because m(0)=\infty, m(1)=1, m(2)=\infty, \ldots)$ $\mathbb{C}^*$ da mertebesi 4 olan eleman

sayısı 2 dir. $(m(i)=4$, $m(-i)=4$ dir.$)$