SOYUT CEBİR DERSİ ÖDEV SORULARI

Soru 1 Aşağıdaki ifadeler doğru mudur? *Neden*?

(a) Bir küme birden fazla ikili işleme göre grup değildir.

(b) Bir grubun her alt kümesi bir alt grup oluşturur.

(c) $\mathbb{Q}^+$ grubu, $\mathbb{R}$ nin bir alt grubudur.

(d) Bir grupta kısaltma aksiyomları geçerli olmayabilir.

(e) Çarpma işlemine göre grup olan her küme toplama işlemine göre de gruptur.

(f) Bir G grubunun tüm elemanları ile değişmeli olan elemanları bir grup oluşturur.

(g) $(\mathbb{Q}, +)$ her alt grubu devirli olan devirli bir gruptur.

(h) Her Abelyan grup devirli ve her devirli grup Abelyandir.

(i) Her pozitif n tamsayısı için, n.mertebeden bir devirli grup vardır.

(j) Devirli bir grubun her elemanı üreteçtir.

(k) Bir grubun her elemanı grubun devirli altgrubunu üretir.

(l) Asal mertebeden her grup devirlidir.

Soru 2 Aşağıdakilerden hangileri bir grup yapısı oluşturur? Neden?

(i) Toplama işlemine göre tek tamsayıların kümesi

(ii) $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ kümesi üzerinde $a * b = ab - a - b + 2$ işlemi

(iii) $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ kümesi üzerinde $a * b = a + b - ab$ işlemi

(iv) $\{-1, 1\}$, bilinen çarpma işlemi

(v) $\{2^m : m \in \mathbb{Z}\}$, bilinen çarpma işlemi

(vi)

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{Q}, a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, c \neq 0 \right\}$$

kümesi üzerinde matris çarpım işlemi

Soru 3 $M(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ kümesi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

işlemiyle bir grup belirtir mi? İnceleyiniz.

Soru 4 $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rccc} f_{a,b} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax + b \end{array}$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım. $G = \{f_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}$ kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup mudur? İnceleyiniz.

Soru 5 G bir grup ve $g \in G$ sabit bir eleman olmak üzere

$$H = \{x \in G : x^{-1}gx = g\}$$

kümesinin G nin bir altgrubu olduğunu gösteriniz.

Soru 6 $X = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ olsun. $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{array}{rccc} f_a : & X & \longrightarrow & X \\ & (x,y) & \longmapsto & (x - ay, y) \end{array}$$

fonksiyonu tanımlayalım. Bu şekildeki fonksiyonlardan oluşan S kümesinin bileşke işlemine göre bir grup olup olmadığını inceleyiniz.

Soru 7 Aşağıdaki tabloda 6 tane grup verilmektedir. Bu grupların kaç tanesi devirlidir? Tüm üreteçleri bulunuz.

$$\begin{array}{lll} G1 = \mathbb{Z} & G2 = \mathbb{Q} & G3 = \{6^n : n \in \mathbb{Z}\} \\ G4 = \mathbb{Q}^+ & G5 = 6\mathbb{Z} & G6 = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

Soru 8 G bir grup olsun. $x \in G$ için

$$\begin{array}{rccc} \tau_x : & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & gx \end{array}$$

şeklinde tanımlasın. Bu durumda

$$R = \{\tau_x : x \in G\}$$

nin bir permütasyon grubu olduğunu gösteriniz.

Soru 9 $G = \{a \in \mathbb{R} : \ -1 < a < 1\}$ ve her $a, b \in G$ için

$$a * b = \frac{a+b}{1+ab}$$

işlemi tanımlansın. $(G, *)$ ikilisinin bir grup olup olmadığını inceleyiniz.

Soru 10

$$\begin{array}{rccc} * : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (n,m) & \longmapsto & n * m = mak\,\{n, m\} \end{array}$$

işlemine göre $(\mathbb{Z}, *)$ bir grup mudur? İnceleyiniz.

Soru 11 G bir grup ve $X \neq \varnothing$ olsun

$$G^X = \{f : \ f : X \to G \ \text{ fonksiyon}\}$$

şeklinde bir küme olsun. G^X üzerinde her $x \in X$ için $f \cdot g(x) = f(x)g(x)$ ile tanımlı ikili işleme göre $(G^X, \cdot)$ nın bir grup olup olmadığını inceleyiniz.

Soru 12 G bir grup olsun. G nin Abelyen olması için gerek ve yeter şart $\forall a, b \in G$ için

$$(ab)^2 = a^2b^2$$

olmasıdır. Gösteriniz.

Soru 13 a bir sabit tamsayı olsun. θ_a ise $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}$ ye $x \in \mathbb{Z}$ için $\theta_a(x) = a+x$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$H = \{\theta_a : a \in \mathbb{Z}\}$$

kümesi bileşke işlemine göre bir grup mudur?

Soru 14 G bir grup ve $g \in G$, sabit bir eleman olsun.

$$\begin{array}{rccc} \theta_g : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonu göz önüne alalım. Bu durumda

$$H = \{\theta_g : g \in G\}$$

kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup mudur?

Soru 15 $G = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq 0\}$ olsun.

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

işlemine göre $(G, *)$ nın bir grup olup olmadığını araştırınız.