

SOYUT CEBİR DERSİ ÇALIŞMA SORULARI II

Soru 1: G Abelyen bir grup olsun. Bu halde;

$$H = \{x \in G : x^2 = e\} \leq G$$

olduğunu gösteriniz.

Soru 2: G bir grup ve $f : G \rightarrow S$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$H = \{p \in G : \text{her } x \in G \text{ için } f(xp) = f(x)\}$$

kümesinin G nin bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

Soru 3: G bir grup ve

$$H_1 = \{x \in G : n \in \mathbb{N} \text{ için } x^n = e\}$$

ve

$$H_2 = \{x^n \in G : x \in G\}$$

olsun. G Abelyen grup ise $H_1 \leq G$ ve $H_2 \leq G$ olduklarını gösteriniz.

Soru 4: \mathbb{C}^* kompleks sayılar grubu için

a) $H_1 = \{x + iy : xy \geq 0\}$

b) $H_2 = \{x + iy : x^2 + y^2 = 1\}$

olsun $H_1 \leq \mathbb{C}^*$ ve $H_2 \leq \mathbb{C}^*$ olup olmadıklarını inceleyiniz.

Soru 5: $G = \text{GL}(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A \neq 0\}$ olsun.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Q} - \{0\} \right\} \leq G$$

midir?

Soru 6: Aşağıdakilerden hangisi doğrudur? Neden?

a) $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$

c) $\mathbb{Z} - \{0\} \leq \mathbb{Q}^*$

d) $\mathbb{Q}^* \leq \mathbb{C}^*$

Soru 7: G bir Abelyen grup ve $H \leq G$ olsun.

$$s(H) = \{x \in G : x^2 \in H\} \leq G$$

olduğunu gösteriniz.

Soru 8: Öyle bir G grubu ve sıfırdan farklı n tamsayısı bulunuz ki $a, b \in G$ için $a^n = b^n$ olduğunda $a \neq b$ olsun.

Soru 9: $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ grubunun bütün üreteçlerini ve bütün altgruplarını bulunuz.

Soru 10: S_4 permütasyon grubunun $A = \{I, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\}$ alt grubu devirli midir?

Soru 11: Mertebesi 28 olan ve g tarafından üretilen bir devirli grubun bütün alt gruplarını, mertebelerini ve bütün üreteçlerini bulunuz.

Soru 12: G bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $m(ab) = m(ba)$ olduğunu gösteriniz.

Soru 13: Kompleks sayılar bileşenli 2×2 tipinden matrisler topluluğu içinde

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrislerinin çarpma işlemine göre ürettiği devirli alt grupları bulunuz.

Soru 14:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olsun. $m(A) = m(B) = 2$ olduğu halde $m(AB)$ nin sonlu olmadığını gösteriniz.

Soru 15: G bir grup ve $x \in G$ olsun. Bu durumda $\langle x \rangle$, x i içeren G nin en küçük alt grubudur. Gösteriniz.

Soru 16: $n = 4, 6, 8$, ve 12 olsun. n . mertebeden devirli grubun bütün alt gruplarını ve üreteçlerini bulunuz.

Soru 17: G bir grup olsun. $a \in G$ için $m(a) = m(a^{-1})$ olduğunu gösteriniz.

Soru 18: $n \neq 1$ tamsayısı için $P_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ nin devirli midir?

Soru 19: $P_4 = \{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\}$ grubunun elemanlarını belirleyiniz. Üreteçlerini bulunuz.

Soru 20: Aşağıdaki tabloda verilen alt grupların eşkümlerini oluşturunuz.

$$\begin{array}{ccc} 4\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} & 4\mathbb{Z} \leq 2\mathbb{Z} & \langle [2]_{12} \rangle \leq \mathbb{Z}_{12} \\ \langle [4]_{12} \rangle \leq \mathbb{Z}_{12} & \langle [18]_{36} \rangle \leq \mathbb{Z}_{36} & \mathbb{Z} \leq \mathbb{R} \end{array}$$

Soru 21: G bir grup ve g , n . mertebeden bir eleman olsun. $g^m = e$ oluyor ise n nin m yi böldüğünü gösteriniz.

Soru 22: $(\mathbb{Z}_{24}, +)$ grubunun tüm alt gruplarını bulunuz, üreteçlerini belirleyiniz, alt gruplar şemasını(latis) çiziniz.

Soru 23: \mathbb{Z}_{27} grubunun üreteçlerinin sayısını, üreteçlerinin neler olduğunu, altgruplarını bulunuz. Ayrıca bu altgrupların latis diyagramını çiziniz.

Soru 24: $|G| = n$ olmak üzere

(a) n asal ise G nin devirli olduğunu gösteriniz.

(b) a daki ifadenin tersinin doğru olmayabileceğine bir örnek veriniz.

