SOYUT CEBİR DERSİ ÖDEV SORULARI III

SORU 1: $\Phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^*$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ çift ise} \\ -1, & x \text{ tek ise} \end{cases}$$

Φ nin homomorfizm olduğunu gösteriniz. Çekirdeğini bulunuz.

SORU 2: $f : G \to H$ bir izomormorfizm ise $g \in G$ için $m(g) = m(f(g))$ dir. Gösteriniz.

SORU 3: G ve H iki grup $f : G \to H$, $g : H \to G$ iki fonksiyon olsun.

$i)$ f örten, f ve $g \circ f$ homomorfizm ise g de homomorfizmdir.

$ii)$ g birebir, g ve $g \circ f$ homomorfizm ise f de homomorfizmdir. Gösteriniz.

SORU 4: $(G, \cdot)$ bir grup olmak üzere G de "$\circ$" ikili işlemi $a \circ b = b \cdot a$ olarak tanımlanıyor. $(G, \circ)$ nın bir grup olduğunu gösteriniz. $(G, \cdot) \cong (G, \circ)$ olduğunu gösteriniz

SORU 5:

$$\begin{array}{rccc} I_a : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & axa^{-1} \end{array}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonun bir izomorfizm olduğunu biliyoruz. Buna göre;

$$H = \{I_a | I_a : G \to G, a \in G\}$$

için

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & G & \longrightarrow & H \\ & a & \longmapsto & I_a \end{array}$$

ile tanımlı fonksiyonun bir homomorfizm olduğunu gösteriniz. Çekirdeğini bulunuz.

SORU 6: $G = \{\alpha_{\alpha,b} : \alpha_{\alpha,b}(x) = ax + b,\ a \neq 0,\ a, b, x \in \mathbb{R}\}$ şeklinde tanımlı bir grup olsun.

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & G & \longrightarrow & G \\ & \alpha_{\alpha,b} & \longmapsto & \alpha_{\alpha,0} \end{array}$$

fonksiyonunun bir homomorfizm olduğunu gösteriniz. Φ nin çekirdeğini ve görüntüsünü bulunuz.

SORU 7: G bir grup ve

$$\begin{array}{rccc} f : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

bir izomorfizm ise G nin Abelyen grup olduğunu gösteriniz.

SORU 8: $(G,\circ)$ bir grup ve S bir küme, $f : S \to G$, $1:1$ ve örten olsun. S üzerinde;

$$x * y = f^{-1}(f(x) \circ f(y))$$

işlemi tanımlansın. $(S,*)$ ın bir grup ve $(S,*) \cong (G,\circ)$ olduğunu gösteriniz.

SORU 9: $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ üzerinde

$$a * b = a + b + ab$$

ikili işlem olsun.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ & a & \longmapsto & 1+a \end{array}$$

fonksiyonu yardımıyla $(\mathbb{R}\backslash\{-1\},*)$ ın bir grup olduğunu gösteriniz.

SORU 10: $f : G \to G'$ bir grup homomorfizmi olsun. G Abelyen (veya devirli) ise $f(G)$ nin Abelyen(veya devirli) olduğunu gösteriniz.

SORU 11: G Abelyen grup ve $n \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

fonksiyonunun homomorfizm olduğunu gösteriniz.

SORU 12: Φ, $\mathbb{Z}_{30}$ dan 5. dereceden olan bir gruba homomorfizm olsun. Bu durumda ÇekΦ yi belirleyiniz.

SORU 13: $\Phi, \mathbb{Z}_{30}$ dan $\mathbb{Z}_{30}$ a bir homomorfizm ve Çek$\Phi = \{0, 10, 20\}$ olsun. $\Phi(23) = 9$ ise 9 a giden bütün elemanları bulunuz.

SORU 14: G bir grup olmak üzere $A = \{f \mid f : G \to G \text{ izomorfizm}\}$ kümesinin bir grup olduğunu gösteriniz. Buradan her $g \in G$ için τ_g,

$$\tau_g(x) = gxg^{-1} \qquad (x \in G)$$

biçiminde tanımlanan G den G ye bir fonksiyon olsun. Bu durumda

a) Her $g \in G$ için $\tau_g \in A$ olduğunu gösteriniz.

b) Φ, G den A ye tanımlanan $\Phi(g) = \tau_g$ $(g \in G)$ biçiminde bir fonksiyon olsun. Φ nın, çekirdeği $Mer(G)$ olan bir homomorfizm olduğunu gösteriniz.

SORU 15: İzomorfizm ve homomorfizm kavramları arasındaki ilişki nedir? Buradan

$$\mathbb{C}^* \ \& \ \mathbb{R}^+ \ \& \ \mathbb{R}$$

grupları arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.